$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ a) <u>Beh</u>: $\left(C(\overline{\Omega}, Y), \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega},Y)} \right)$ BR

<u>Bw</u> $\boxed{1}$ Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{\Omega}, Y)$ CF, also $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p,q \geq N : \varepsilon > \| f_p - f_q \|_{C(\overline{\Omega},Y)}$

$= \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \| f_p(x) - f_q(x) \|_Y \geq \| f_p(x) - f_q(x) \|_Y$ f. alle $x \in \overline{\Omega}$. Also ist $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$

$\subset Y$ CF und somit konvergent, da Y BR. Defn $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,

$f : \overline{\Omega} \to Y$. $\boxed{2}$ $\forall x \in \overline{\Omega} : \| f_p(x) - f_q(x) \|_Y < \varepsilon \Rightarrow \forall x : \lim\limits_{q\to\infty} \| f_p(x) - f_q(x) \|_Y$

$\overset{\boxed{1}}{\underset{\|\cdot\|_Y \text{ stetig}}{=}} \| f_p(x) - f(x) \|_Y < \varepsilon$ $\boxed{3}$ $\| f_p - f \|_{C(\overline{\Omega},Y)} = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \| f_p(x) - f(x) \|_Y$

$\overset{\boxed{2}}{<} \varepsilon$ (also $f_p \to f$) q.e.d.

12

1.08

aluation

$\boxed{4}$ <u>Beh</u> f stetig <u>Bew</u> z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Seien p, q so groß, dass $\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in \overline{\Sigma}$. (*) Da f_p und f_q stetig sind gibt es $\delta > 0$ so dass $\|f_p(x) - f_p(y)\| < \varepsilon$ <u>und</u> $\|f_q(x) - f_q(y)\| < \varepsilon$ für $|x-y| < \delta$. Also

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x) - f_q(x)\| + \|f_q(x) - f_q(y)\| + \|f_q(y) - f\| < 4\varepsilon$$

(*) nach $\boxed{1}$ und $\|f_p(x) - f(x)\| < \varepsilon$, $\|f_q(x) - f(x)\| < \varepsilon$ nach $\boxed{2}$.