Aufgabe 2 Beh: (X,d) metrisch $(x_n) \subset X$ CF mit konv. TF $(x_{n_k}) \subset X$. Dann (x_n) konvergent. Bew Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ $\forall p,q \geq N$: $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ und $\exists K \in \mathbb{N}$ $\forall k > K$: $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ (also $x_{n_k} \to x$). Dann

$$d(x, x_n) \leq \underbrace{d(x, x_{n_k})}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{für } k \geq K}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_n)}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{für } n_k, n \geq N}} < 2\varepsilon$$

für $n \geq N$, $\underbrace{k \geq K \text{ und } n_k \geq N}_{(*)}$. Da $(n_k) \nearrow$ kann man k gross genug wählen dass $(*)$. $\square$

2) i) $\Rightarrow$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Rightarrow \exists N: \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$

$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon \Rightarrow A_n := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ CF

vollst.
$\Rightarrow \exists x \in X: \|x - A_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$

ii) $\Rightarrow$ i) $(x_n) \subset X$ CF $\Rightarrow$ zu $k \in \mathbb{N}$ $\exists N_k: \forall n, m \geq N_k$

: $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$. $\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k})$ TF von (x_n) mit

$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k} \overset{\text{majo}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty \overset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \exists x \in X:$

$0 = \lim_{N \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| = \lim_{N \to \infty} \|x - x_{n_1} + x_{n_N}\| \overset{\text{Norm}}{\Rightarrow} \lim_{N \to \infty} x_{n_N} = x_{n_1} - x$

$\in X \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in X

(*) <u>induktiv</u>: $n_1, \dots, n_k$ konstruiert. $\exists N_{k+1}: \|x_m - x_n\| < 2^{-(k+1)} \ \forall m, n \geq N_{k+1}$. <u>$n_{k+1} \geq N_{k+1}$</u> $\Rightarrow$ wähle $n_{k+2} \geq N_{k+1}$ ✓

<u>$n_{k+1} < N_{k+1}$</u>: wähle $n_{k+1}^{\text{neu}} > N_{k+1}$ und dann n_{k+2}.

$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq 2^{-k}$, $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+2}}\| < 2^{-k}$