$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ Beh.: Es gilt Isometrie $T: (X,d) \longrightarrow T(X) \subset (\ell^\infty, d_\infty)$

Bew.: Sei $M = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ abzählbar und dicht. Definiere

$T: X \to \ell^\infty, \quad x \longmapsto \big(d(x_k,x) - d(x_k,x_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$. $\boxed{1}$ T ist surjektiv

auf $T(X)$. $\boxed{2}$ T ist injektiv: angenommen $\exists\, x \neq y$ mit $T(x) = T(y)$.

Dann gilt $\forall k$: $d(x_k,x) - d(x_k,x_1) = d(x_k,y) - d(x_k,x_1)$

$\Leftrightarrow \forall k$: $d(x_k,x) = d(x_k,y)$. Falls $x = x_k$ oder $y = x_k$ $\boxed{\text{für ein } k\in\mathbb{N}}$ sind wir fertig.

Also $x \neq x_k$ und $y \neq x_k$. Dann $d(x,y) \le d(x,x_k) + d(y,x_k)$

$= 2\, d(x,x_k)$ f. alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $0 < \varepsilon < \frac{d(x,y)}{2} \overset{(*)}{\le} d(x,x_k)$.

Dann ist $B_\varepsilon(x) \cap M = \emptyset$ denn $(*)$ gilt f. alle $x_k \in M$. ↯ zur

Dichtheit von M. $\boxed{3}$ Es gilt $d_\infty(T(x), T(y)) = d(x,y)$ denn:

$d(x,y) \geq |d(x_k,x) - d(x_k,y)| \quad \forall k \implies d(x,y) \overset{\circledast}{\geq} \sup_{k \in \mathbb{N}} |d(x_k,x) - d(x_k,y)| = d_\infty(T(x),T(y))$. Da $M \subset X$ dicht gibt es eine TF $(x_{k_\ell}) \xrightarrow{\ell\to\infty} x$, also $|d(x_{k_\ell},x) - d(x_{k_\ell},y)| \xrightarrow{\ell\to\infty} d(x,y)$ also gilt in $\circledast$ die Gleichheit.

$\boxed{4}$ T wohldefiniert, also $T(X) \subset \ell^\infty$: $\sup_{k\in\mathbb{N}} |T(x)|$

$= \sup_{k\in\mathbb{N}} |d(x_k,x) - d(x,x_1)| \overset{\boxed{3}}{\leq} d(x,x_1) < \infty$ also $T(x) \in \ell^\infty$ $\square$