$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ **Beh**: $\overline{A} \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge in A hat eine in X konv. TF

Bew: „$\Rightarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subset \overline{A}$. Da $\overline{A}$ kompakt ist, ist $\overline{A}$ folgenkompakt, also gibt es eine konv. TF von A (mit GW in $\overline{A}$)

„$\Leftarrow$" Wir zeigen dass $\overline{A}$ folgenkompakt ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{A}$. Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ gibt es eine Kugel $B_{1/n}(x_n)$ um x_n mit $B_{1/n}(x_n) \cap A \neq \emptyset$. Also gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $d(x_n, a_n) < 1/n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Nach Vor. gibt es eine konv. TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit GW $a\in\overline{A}$. Dann gilt

$$d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Daher ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konv. TF von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.