Aufgabe 3a Beh: $C^1 \underset{\boxed{2}}{\overset{\boxed{1}}{\subsetneq}} C^{0,1} \underset{\boxed{4}}{\overset{\boxed{3}}{\subsetneq}} C^{0,\alpha} \underset{\boxed{6}}{\overset{\boxed{5}}{\subsetneq}} C^0$

Bew: $\boxed{1}$ $f \in C^1([a,b]) \Rightarrow f'$ beschränkt $\overset{MWS}{\Rightarrow} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(\eta)| \leq L$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y| \Rightarrow f$ Lipschitz-stetig

$\boxed{2}$ $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig denn $||x|-|y|| \overset{\triangle}{\leq} |x-y| \Leftrightarrow$

$\frac{||x|-|y||}{|x-y|} \leq 1$. Aber f ist nicht db.

$\boxed{3}$ Vorlesung Satz 2.9 $\boxed{4}$ $f(x) = |x|^\alpha$ f. $[0,1] \to \mathbb{R}$ ist

wegen $||x|^\alpha - |y|^\alpha| \overset{(*)}{\leq} |x-y|^\alpha$ Hölderstetig zum Exponenten α.

wegen $\frac{|x|^\alpha}{|x|} = |x|^{\alpha-1} = \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} \xrightarrow[1-\alpha>0]{x\to 0} \infty$ nicht Lipschitzstetig. $\cancel{}$ denn:

$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq K\,|x-y| \overset{y=0}{\Rightarrow} \frac{|x|^\alpha}{|x|} \leq K$

$(*)$ $y \geq x \Rightarrow t = \frac{y}{x} \geq 1 \Rightarrow$

$||y|^\alpha - |x|^\alpha| = ||\frac{y}{x}|^\alpha - 1|\,|x|^\alpha \leq$

$|y-x|^\alpha = ||x|(|\frac{y}{x}| - \frac{|x|}{|x|})|^\alpha = |x|^\alpha\,(|\frac{y}{x}|-1)^\alpha$

$\Leftrightarrow |t^\alpha - 1| \leq |t-1|^\alpha \Leftrightarrow t^\alpha - 1 \leq (t-1)^\alpha$

$\Rightarrow \alpha t^{\alpha-1} \leq \alpha(t-1)^{\alpha-1}$

$\Rightarrow t^{\alpha-1} \leq (t-1)^{\alpha-1}$

$\Rightarrow 1 \leq \underbrace{\left(\frac{t-1}{t}\right)}_{<1}^{\overbrace{\alpha-1}^{<0}} = \frac{1}{\left(\frac{t}{t-1}\right)^{1-\alpha}}$

$\boxed{5}$ ✓ $\boxed{6}$ $f(x) := |x|^{\alpha/2} \notin C^{0,\alpha}$:

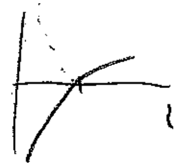
$\frac{|x|^{\alpha/2} - |y|^{\alpha/2}}{|x-y|^\alpha} \overset{y=0}{=} \frac{|x|^{\alpha/2}}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha/2} = \frac{1}{|x|^{\alpha/2}} \xrightarrow{x\to 0} \infty$

$\boxed{\text{Aufgabe 35}}$ <u>Beh</u> $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\left(\ln\frac{x}{2}\right)^{-1}$, $f\notin C^{0,\alpha}[0,1]$ f. jedes $\alpha\in(0,1)$

<u>Bew</u> $$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x|^{\alpha}} = |x|^{-\alpha}\left|\left(\ln\frac{x}{2}\right)^{-1}\right| \xrightarrow{x\to 0} \infty \quad \square$$

<u>Beh</u> $f\in C^{0}([0,1])$ <u>Bew</u> $f(1)=1/\ln\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\square$

<u>Beh</u> $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ $g(x):=\begin{cases} x\cdot|\ln x| & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$, $g\in C^{0,\alpha}[0,1]$ $\forall\alpha<1$



<u>Bew</u> Wegen $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ ist g wohldefiniert und daher in $C^{0}[0,1]$. Berechne zunächst:

$$\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \le \frac{|g(x)-g(y)|}{|x^{\alpha}-y^{\alpha}|} \underset{\exists\xi\in(0,1)}{\overset{\text{MWS}}{=}} \frac{|-1-\ln\xi|}{|\alpha\xi^{\alpha-1}|} = \alpha^{-1}\xi^{1-\alpha}\cdot|-1-\ln\xi|$$

$$\le \alpha^{-1}\xi^{1-\alpha}(1+|\ln\xi|) \xrightarrow{\xi\to 0} 0.$$ Für $\delta>0$ ist $\sup\limits_{x\neq y\in[\delta,1]}\left|\frac{g(x)-g(y)}{|x-y|^{\alpha}}\right|<\infty$. Auf $[0,\delta)$ gilt $|x-y|<\delta$ und daher $\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\le\varepsilon$ (denn $\xi\to 0$ heißt $|x-y|<\delta$) nach voriger Abschätzung.

<u>Beh</u> $g\notin C^{0,1}[0,1]$ <u>Bew</u> $$\frac{|g(x)-g(0)|}{|x|} = |\ln x| \xrightarrow{x\to 0} \infty \quad \square$$