$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ $\boxed{1}$ Zeige nur $\triangle$: $\|p+q\| = \| \sum_{k=0}^{n^{(p)}} a_k^{(p)} t^k + \sum_{k=0}^{n^{(q)}} a_k^{(q)} t^k \|$

$$= \| \sum_{k=0}^{n^{(p)}} (a_k^{(p)} + a_k^{(q)}) t^k + \sum_{k=n^{(p)}+1}^{n^{(q)}} a_k^{(q)} t^k \| = \sum_{k=0}^{n^{(p)}} |a_k^{(p)} + a_k^{(q)}| + \sum_{k=n^{(p)}+1}^{n^{(q)}} |a_k^{(q)}|$$

$\boxed{\text{o.E. } n^{(p)} \le n^{(q)}}$

$$\le \sum_{k=0}^{n^{(p)}} |a_k^{(p)}| + \sum_{k=0}^{n^{(q)}} |a_k^{(q)}| = \|p\| + \|q\|$$

$\boxed{2}$ Beh: $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ nicht vollständig. Bew: Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ mit

$p_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} t^k$ ist CF, denn $\| p_n - p_m \| \overset{n>m}{=} \| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} t^k \|$

$= \sum_{k=m+1}^{n} |\frac{1}{k^2}| < \varepsilon$ für m, n groß genug. Sei $p_N(t) := \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$

$$\|p_n - p_N\| \overset{n>N}{=} \| \sum_{k=0}^{N} (\frac{1}{k^2} - a_k) t^k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} t^k \| = \sum_{k=0}^{N} |\frac{1}{k^2} - a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\ge \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > 0$$

$\boxed{\text{Aufgabe } 1}$ a) $\boxed{1}$ $\|\ \| : P \to [0,\infty)$: ✓ $\boxed{2}$ $\|\lambda p\| = \sum |\lambda a_k| = |\lambda| \, \|p\|$ $\boxed{3}$ $\|p+q\| = \sum |a_k^p + a_k^q| \, t^k \leq \|p\| + \|q\|$

b) i) $T_p(t) = \int_0^t p(s) \, ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} a_k s^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{k+1} s^{k+1} \Big|_0^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}$

$\Rightarrow \|Tp\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \|p\| \Rightarrow$ (T ist stetig und $\|T\| = \sup_{\|p\|=1} \|Tp\| \leq \sup_{\|p\|=1} \|p\|$

$= 1$ und für $p(t) = 1$ gilt $\|p\| = 1$, $\|Tp\| = 1 \Rightarrow 1 \leq \|T\| \leq 1$

$T \in \mathcal{L}(P, P)$

b ii) $T_p(t) = p(t+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t+1)^k \Rightarrow$ ist linear und $\|Tp\| =$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{e=0}^{k} \binom{k}{e} t^e = \sum_{e=0}^{n} \sum_{k=e}^{n}$

$a_0 \binom{0}{e} t^0$

$a_1 \binom{0}{e} t^0 \binom{1}{e} t^1$

$\boxed{1ii}$ Für $p_n(t) = t^n \in \mathcal{P}$ gilt: $Tp_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t+1)^k = (t+1)^n$ | ok

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \Rightarrow \| Tp_n \| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$. Daher ist

T unbeschränkt und somit nicht stetig.

$\boxed{1iii}$ Für $p_n(t) = t^n \in \mathcal{P}$ gilt: $Tp_n(t) = p_n'(1) = n \Rightarrow$

$\| Tp_n \| = |n| = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ (wie in 1ii)

$\boxed{1iv}$ Beh: $\| T \| = 1$ Bew: Sei $p_n(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^n$, also $Tp_n(t) = p_n'(0)$

$= a_1$. Damit $\| T \| = \sup_{\| p_n \| = 1} \| Tp_n \| = \sup_{\| p_n \| = 1} |a_1| \leq 1$ denn $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = 1 = \| p_n \|$.

Aber für $p(t) = t$ gilt $p'(0) = 1$, $\| p \| = \| 1$ und $\| Tp \| = \| p'(0) \|$

$= |1| = 1$, also $\| T \| \geq 1$ $\square$