

Aufgabe 2

[1] T linear: $T(f+g) = \varphi \cdot (f+g) = Tf + Tg$,

$$T(\lambda f) = \varphi(\lambda f) = (\lambda \varphi)f = \lambda T(f)$$

[2] $\|T\| \leq \|\varphi\|_\infty$: Für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ gilt $\|Tf\|_p =$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi f|^p dx \leq \|\varphi\|_\infty^p \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx \leq \|\varphi\|_\infty^p \|f\|_p^p < \infty$$

da $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Also $\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|$

$$\leq \sup_{\|f\|=1} \|\varphi\|_\infty \|f\|_p = \|\varphi\|_\infty$$

[3] $\|T\| \geq \|\varphi\|_\infty$: ess sup $\varphi = \inf \{M \in \mathbb{R} \mid \chi_M \cdot \{x \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(x) > M\} = \emptyset\}$

= kleinste wertliche obere Schranke also: $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in M_\varepsilon$ mit $\chi_{(M_\varepsilon)} > 0$

so dass $\|\varphi\|_\infty - \varepsilon \leq \|\varphi\|_{M_\varepsilon}$. Sei also $\varepsilon > 0$ und $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$

so eine Menge. Wähle $N_\varepsilon \subset M_\varepsilon$ mit $\lambda^p(N_\varepsilon) < \infty$, $\forall \varepsilon$.

$$N_\varepsilon = M_\varepsilon \cap K_0(\mathbb{R}), \quad R < \infty. \quad \text{Dann} \quad f_\varepsilon := \int_{N_\varepsilon} \frac{\lambda(N_\varepsilon)}{\lambda(N_\varepsilon)} \cdot 1_{N_\varepsilon}.$$

$$\text{Dann gilt } \|f_\varepsilon\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{N_\varepsilon} \frac{\lambda(N_\varepsilon)}{\lambda(N_\varepsilon)} \cdot 1_{N_\varepsilon} \right)^p \cdot \lambda(N_\varepsilon) \right)^{1/p} = \lambda(N_\varepsilon)^{1/p}.$$

= 1. Außerdem

$$\|T f_\varepsilon\|_p = \| \varphi f_\varepsilon \|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) f_\varepsilon(x)|^p \cdot \lambda(N_\varepsilon) \right)^{1/p} = \lambda(N_\varepsilon)^{1/p} \left(\int_{N_\varepsilon} |\varphi(x)|^p \cdot \lambda(N_\varepsilon) \right)^{1/p}.$$

$$\ll \| \varphi \|_{\infty} - \varepsilon \left(\int_{N_\varepsilon} \frac{\lambda(N_\varepsilon)}{\lambda(N_\varepsilon)} \cdot 1_{N_\varepsilon} \right)^{1/p} = \lambda(N_\varepsilon)^{1/p} \left(\int_{N_\varepsilon} |\varphi(x)|^p \cdot \lambda(N_\varepsilon) \right)^{1/p}.$$

$$= \| \varphi \|_{\infty} - \varepsilon > \| \varphi \|_{\infty} - \varepsilon \quad \text{Bsp. 3.2} \quad \text{Übung 3.2} \quad \text{Satz 3.2}$$

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \geq \|T f_\varepsilon\| \geq \| \varphi \|_{\infty} - \varepsilon \quad \text{Bsp. 3.2} \quad \text{Übung 3.2} \quad \text{Satz 3.2}$$

[4] Wegen [2] und [3] gilt also $\|T\| = \|q\|_\infty < \infty$. Somit ist T -beschränkt und daher stetig!