$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ X BR, $T: X \to \mathbb{R}$ lineares Funktional

<u>Bew</u> $N(T) = \ker T$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ T stetig

„$\Longleftarrow$" Sei $x_n \to x$ mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ker T$. Damit folgt

$T(x_n) \xrightarrow{T \text{ stetig}} T(x)$, also $T(x) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) \overset{x_n \in N(T)}{=} 0$

„$\Longrightarrow$" Angenommen T ist nicht stetig. Also sei $x_n \to 0$ und

$T(x_n) \not\to 0$. Sei $x \in X \setminus N(T)$ und $T(x) = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei

OE $r > 0$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} r$. Dann ist $T^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap N(T) = \emptyset$.

Betrachte $y_n := \frac{x}{r} - \frac{x_n}{T(x_n)} \in X$. Dann gilt $T(y_n) = T(x) \cdot \frac{1}{r}$

$- \frac{T(x_n)}{T(x_n)} = 0$, also $y_n \in N(T)$. Aber $\lim_{n \to \infty} y_n = \frac{x}{r} \notin N(T)$

im Widerspruch zur Abgeschlossenheit von $N(T)$.