

1c Betr M_α und M_β sind $\varphi \in L^2([-1,1])^*$ zu beweisen

Bew. Annahme: $\varphi \in (L^2([-1,1]))^*$, $\varphi \neq 0$, besetzt M_α und M_β . Da $\overline{M_\alpha} \stackrel{b)}{=} L^2([-1,1])$ und $0 \in L^2([-1,1])$ gibt es

zu $\varepsilon > 0$ $z \in M_\alpha$ mit $\|z\| = \|z - 0\| < \varepsilon$. Man erhält $\square \sup_{x \in M_\alpha} \varphi(x)$

$$\gg \varphi(z) \stackrel{a)}{=} \langle \varphi, z \rangle \gg -\|\varphi\| \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in M_\alpha} \varphi(x) > 0$$

$$\varphi(z) \leq \|\varphi\| \|z\|$$

$$\text{und } \neq 0$$

2 Da $\varphi \in L^2([-1,1])^*$ linear ist gibt es $u \in L^2([-1,1])$

mit $\varphi(w) < 0$. Da $\overline{M_\beta} \stackrel{d)}{=} L^2([-1,1])$ ist gibt es zu

jeden $\varepsilon' > 0$ ein $w \in M_\beta$ mit $\|w - u\| < \varepsilon'$

3 Mit w aus 2: $\varphi(w) = \varphi(w - u + u) = \varphi(u) + \varphi(w - u)$

$$\leq \varphi(u) + \|\varphi\| \|w - u\| < \varphi(u) + \|\varphi\| \varepsilon' < 0 \quad \text{für } \varepsilon' < \frac{\|\varphi(u)\|}{\|\varphi\|} = \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|}$$

[4] $\sup_{x \in M_\alpha} \varphi(x) > 0 \wedge \sup_{w \in M_\beta} \varphi(w) < 0$ widerspricht d. Aussage $\square$

Aufgabe 2 Bew: $\square$ Existenz: für $m > n$ gilt $x_m \in \overline{B(x_n, r_n)}$

$\subset B(x_n, r_n)$, also $d(x_m, x_n) \leq r_n$. Wegen $r_n \rightarrow 0$ ist

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF. Da X vollst. ist gilt es $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Für jedes $m > N$ ist $x_m \in \overline{B(x_n, r_n)}$ also $x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{B(x_n, r_n)}$, also $x_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B(x_n, r_n)}$.

[2] Eindeutigkeit: Sei $x_1 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B(x_n, r_n)}$ und $x_1 \neq x_0$. Es

jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_0) \leq 2r_n$

also $0 < d(x_1, x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ $\downarrow$

Aufgabe 3 $\square$ Beh $X \in \mathcal{BR}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\forall x \in X \exists n \in \mathbb{N}: T^n(x) = 0$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: T^m \equiv 0$ Bew, T^m Nach Voraussetzung in $X =$

$\cup \ker T^m$. Außerdem ist $\ker T^n$ abgeschlossen. Nach Sp/Banach

gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $A_m \neq \emptyset$. Sei $x \in A_m$ und $B_\varepsilon(x) \subset$

A_m . Sei $y \in X$ beliebig. Dann ist $x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|} \in B_\varepsilon(x)$ also:

$$0 = T^m \left(x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|} \right) = T^m(x) + T^m \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{\varepsilon}{2\|y\|} T^m(y), \text{ Also}$$

$$T^m(y) = 0 \quad \forall y \in X. \quad \square$$

$\square$ Beh $V(\|\cdot\|: (P, \|\cdot\|))$ ist kein BR. Bew Angenommen $(P, \|\cdot\|)$ ist BR.

Der VR $\mathcal{P}_n = \{ p \in \mathcal{P} \mid \text{grad } p = n \} \subset \mathcal{P}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{P}$

denn: $\cup \mathcal{P}_n \approx \mathbb{R}^{n+1}$ also $\exists \|\cdot\|_n$ auf $\mathcal{P}_n$ mit $(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|_n)$

$\approx (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$. Also ist $(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|_n)$ vollständig, also

da $\dim P_n < \infty$ auch $(P_n, \|\cdot\|)$ vollständig also $P_n \subset P$

abgeschlossen. Außerdem gilt $P = \bigcup P_n$ mit Surjektive gibt

es $m \in \mathbb{N}$ mit $P_m \neq \emptyset$. Sei $p \in B_\varepsilon(p) \subset P_m$. Sei

$$q(t) := p(t) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{t^{m+1}}{\|t^{m+1}\|} \in P_{m+1} \setminus P_m \quad \text{Mit } s(t)$$

$$\|q - p\| = \frac{\varepsilon}{\|t^{m+1}\|} = \frac{\varepsilon}{\|t\|^{m+1}} \quad \|q - p\| = \frac{\varepsilon}{\|t\|^{m+1}} = 1 \Rightarrow \text{also}$$

$$\|p - q\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2} s \right\| = \frac{\varepsilon}{2} \|s\| = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ also } q \in B_\varepsilon(p) \subset P_m \quad \checkmark$$