Aufgabe 1

Bew: X r $\Longleftrightarrow$ X^* r

„$\Rightarrow$" X reflexiv $\Rightarrow$ $j : X \longrightarrow X^{**}$, $j(x)(x') := x'(x)$

notiert als $\langle \underbrace{j(x)}_{\in X^{**}}, x' \rangle \overset{\boxed{2}}{=} \langle x', x \rangle$. Zz ist dass $\tilde{j} : X^*$

$\longrightarrow (X^{**})^*$ surjektiv ist. Sei $x''' \in (X^{**})^*$. Dann gilt

$$\boxed{\langle \tilde{j}(x'), x'' \rangle :\overset{\boxed{1}}{=} \langle x'', x' \rangle}$$

$\tilde{j}(\underbrace{x''' \circ j}_{\in X^*})(x'') \overset{\boxed{1}}{=} \langle \underbrace{x''}_{\in X^{**}}, \underbrace{x''' \circ j}_{\in X^*} \rangle \underset{j \text{ bijektiv}}{\overset{\boxed{2}}{=}} \langle x''' \circ j, j^{-1}(x'') \rangle = (x''' \circ j)(j^{-1}(x''))$

$= (x''' \circ j \circ j^{-1})(x'') = x'''(x'')$. Also $\tilde{j}(x''' \circ j) = x'''$, also $\tilde{j}$ surj.

„$\Leftarrow$" $\boxed{1}$ X^* r $\overset{\text{oben}}{\Longrightarrow}$ X^{**} r $\boxed{2}$ X vollst. $\Rightarrow$ X^* vst. $\Rightarrow$ X^{**} vst.

$\boxed{3}$ $j \in L(X, X^{**}) \Rightarrow j(X) \underset{}{\overset{\text{Unterraum}}{<}} X^{**} \overset{\boxed{2}}{\Longrightarrow} j(X)$ vollst. $\Rightarrow$ $j(X)$

abg. $\underset{\text{L 5.19.}}{\overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow}}$ $j(X)$ r $\underset{5.18}{\overset{j \text{ Isometrie}}{\Longrightarrow}}$ X r. $\square$

Aufgabe 2a X, Y BR, $(x_n) \subset X$, $T \in$ linear

a) <u>Beh</u> $x_n \xrightarrow{w} x \wedge T$ stetig $\Longrightarrow$ $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$

<u>Bew</u> $\boxed{1}$ $Tx_n \xrightarrow{w} Tx \overset{5.4}{\Longleftrightarrow} \forall f \in Y^* : \langle f, Tx_n \rangle \to \langle f, x \rangle$

$\boxed{2}$ Sei $f \in Y^*$: $\langle f, Tx_n \rangle = \langle f \circ T, x_n \rangle \xrightarrow[f \circ T \in X^*]{5.4.} \langle f \circ T, x \rangle$

$= \langle f, Tx \rangle \overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow} Tx_n \xrightarrow{w} Tx$

b) <u>Beh</u> $x_n \xrightarrow{w} x \wedge T$ kpkt $\Longrightarrow$ $Tx_n \to Tx$

<u>Bew</u> $\boxed{1}$ $x_n \xrightarrow{w} x \overset{5.5.ii)}{\Longrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \|x_n\| < M \Longrightarrow (x_n) \subset B_M(0)$

$\boxed{2}$ Sei o.E. $(x_n) \subset B_1(0)$ dann: $\overline{\{Tx_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{T(B_1(0))}$.

Da T kpkt ist, ist $\overline{T(B_1(0))}$ kpkt also folgt

aus $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ (Teil a)) $Tx_n \to Tx$ mit Blatt 12 A3.

$\boxed{2c}$ **Beh** $\left(x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx\right) \Rightarrow T$ stetig

Bew $\boxed{1}$ Annahme T nicht stetig. Dann gibt es $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ so dass $\|Tx_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Wähle eine TF $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ so dass $\|Tx_{n_k}\| \geq k^2$. $\boxed{2}$ $y_{n_k} := \frac{x_{n_k}}{\|Tx_{n_k}\|} \cdot k$

$\overset{2}{\Rightarrow} \|y_{n_k}\| = \frac{k}{\|Tx_{n_k}\|} \overset{\boxed{1}}{\leq} \frac{k}{k^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\boxed{3}$ $\|Ty_{n_k}\| \overset{\boxed{2}}{=} k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

$\boxed{4}$ $y_{n_k} \xrightarrow{\boxed{2}} 0 \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} Ty_{n_k} \xrightarrow{w} T0 = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \|Ty_{n_k}\| < M$ i Wid. zu $\boxed{3}$.

$\square$

<u>Beh</u> $(x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \to Tx) \wedge X$ r $\Rightarrow T$ kpkt.

<u>Bew</u> Zu zeigen ist: $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt

$\boxed{1}$ $T(\overline{B_1(0)})$ folgenkompakt: sei $(y_n) \in T(\overline{B_1(0)})$, also $\exists\, x_n \in \overline{B_1(0)}: y_n = Tx_n$. Weil X r ist, ist $\overline{B_1(0)}$ schwach kpkt, also schwach folgenkpkt, also $\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ TF von (x_n) mit $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{w} x \in \overline{B_1(0)}$. Nach Vor. ist dann $Tx_{n_k} \to Tx$, also $y_{n_k} \to Tx \in T(\overline{B_1(0)})$.

$\boxed{2}$ Wegen $\boxed{1}$ ist $T(\overline{B_1(0)})$ kompakt, also abgeschlossen.

$\overline{T(B_1(0))}$ kpkt $\Uparrow \boxed{2}$

$\boxed{3}$ $T(B_1(0)) \subset T(\overline{B_1(0)}) \Rightarrow \overline{T(B_1(0))} \subset \overline{T(\overline{B_1(0)})} \overset{\boxed{2}}{=} T(\overline{B_1(0)})$

$\boxed{\text{Aufgabe 3a}}$ $Y \subset X$ $Y^\perp = \{ f \in X^* \mid \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in Y \} \subset X^*$

$(Y^\perp)^\perp = \{ F \in X^{**} \mid \langle F, f \rangle = 0 \ \forall f \in Y^\perp \} \in X^{**}$

__Beh__ $Y = (Y^\perp)^\perp$ __Bew__ „$\subset$" $x \in Y \Rightarrow j(x) \in Y^{**} \Rightarrow \forall f \in Y^\perp \subset X^*$

: $\langle j(x), f \rangle = \langle f, x \rangle = 0$

„$\supset$" Annahme: $\exists\, x_0 \in (Y^\perp)^\perp \setminus Y$. Da Y abg. und konvex

und $\{x_0\}$ kompakt gibt es nach Hahn-Banach $f \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

mit $\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle$ f. alle $x \in Y$. Da $\tau x \in Y$

f. alle $\tau \in \mathbb{R}$ folgt $|\tau| \langle f, x \rangle = \langle f, \tau x \rangle < \alpha$ $\forall \tau$, also

$\langle f, x \rangle = 0$ und somit $f \in Y^\perp$ und $0 < \alpha < f(x_0)$ $\lightning$

$\boxed{\text{Aufgabe 3b}}$ „$\supset$" Zu zeigen $(Y^\perp)^\perp \subset Y$.

Sei $F \in (Y^\perp)^\perp \Rightarrow \forall f \in Y^\perp : 0 = \langle F, f \rangle \overset{\boxed{j \text{ bijektiv}}}{=} \langle f, j^{-}(F) \rangle$

Annahme $y := j^{-}(F) \in X \setminus Y. \Rightarrow \exists f \in X^* : f|_Y \equiv 0$

$\wedge \langle f, y \rangle > 0 \Rightarrow f \in Y^\perp \wedge f(y) = f(j^{-}(F)) = 0$ ↯

Also $y = j^{-}(F) \in Y \Rightarrow j^{-}(Y^\perp)^\perp \subset Y$

$\boxed{\text{Aufgabe 3b}}$ <u>Beh</u> $\left.\begin{matrix} f \in X^* \\ X\ r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in X,\ x_0 \neq 0 : \ f(x_0) = \|f\|\,\|x_0\|$

<u>Bew</u> $\boxed{0}$ Nach Blatt A gibt es $F \in X^{**}$ mit $F(f) = \|f\|$ und $\|F\| = 1$. $\boxed{1}$ Da $j : X \longrightarrow X^{**}$ Isometrie ist gilt ~~*~~ für $x_0 := j^{-1}(F)$: $\|x_0\| = \|j^{-1}(F)\| = \|F\| = 1$, ~~$x_0$ ...~~ $\boxed{2}$ $x_0 \underset{\boxed{1}}{\neq} 0$

$\boxed{3}$ $\langle f, x_0 \rangle = \langle f, j^{-1}(F) \rangle \overset{\text{Dfn}}{\underset{j}{=}} \langle F, f \rangle \overset{\boxed{1}}{\underset{\boxed{0}}{=}} \|f\| \cdot \|x_0\|$ $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ $X \in C^1[-1,1]$, $f, f_n : X' \to \mathbb{R}$, $f(x) := x'(0)$

$f_n(x) := \dfrac{x(1/n) - x(-1/n)}{2/n}$, $\|x\|_X := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$

a) Beh f, f_n stetig + linear Bew Linearität ist klar.

Es gelten $|f(x)| = |x'(0)| \le \|x'\|_\infty \le \|x\|_X$ und

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x(1/n) - x(-1/n)}{2/n} \right| = |x'(\xi_n)| \le \|x'\| \le \|x\|_X \quad \square$$

$\boxed{\text{MWS}: \exists\, \xi_n \in (-1/n, 1/n)}$

b) Beh $f_n \xrightarrow{*} f$ Bew: Für alle $x \in X$ gilt:

$$\langle f_n, x \rangle \overset{a)}{=} x'(\xi_n) \xrightarrow[\xi_n \to 0]{n \to \infty} x'(0) = \langle f, x \rangle \quad \square$$

$x \in C^1$

c) Beh $f_n \not\to f$ Bew: Wir müssen zeigen $\|f_n - f\|$

$$= \sup_{x \in X} \frac{\|(f_n - f)(x)\|}{\|x\|} \not\to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dazu sei $x_n(t) := \sin(\pi t n)$. Es gilt $x_n(0) = 0$,

$x_n'(t) = \pi n \cos(\pi t n)$, $\|x_n\|_\infty + \|x_n'\|_\infty = \|x_n\|_X \leq 1 + \pi n$

$f_n(x_n) = \frac{n}{2}\left(\sin(\pi) - \sin(-\pi)\right) = 0$. Also

$$\|f_n - f\| = \sup \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\|x\|_X} \geq \frac{|f_n(x_n) - f(x_n)|}{\|x_n\|_X} = \frac{|0 - \pi n|}{\|x\|_\infty + \|x'\|_\infty}$$

$$\geq \frac{\pi n}{1 + \pi n} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \quad \square$$