iii) Sei $A \in \mathcal{A}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k \geq n$. Es gilt

$$P_\mu(A \cap \Theta^{-k}B) = E_\mu(\underbrace{1_A}_{\mathcal{A}_n\text{-mb.}}(1_B \circ \Theta^k)) \overset{\text{Version}}{=} E_\mu(\underbrace{1_A}_{\mathcal{A}_n\text{-mb}} E_\mu[1_B \circ \Theta^k \mid \mathcal{A}_n])$$

$$\overset{ME}{=} E_\mu(1_A \, E_{X_n}(1_B \circ \Theta^{k-n})) = E_\mu(1_A \, E_{X_n}(E_{X_{k-n}}(1_B)))$$

$\left(E_x(1_B \circ \Theta^{k-n} \mid \mathcal{A}_{k-n}) \overset{ME}{=} E_{X_{k-n}}(1_B) \overset{E_x}{\Rightarrow} E_x(1_B \circ \Theta^{k-n}) = E_x(E_{X_{k-n}}(1_B)). \right)$ Wir zeigen nun:

$\forall x: \quad E_x[E_{X_{k-n}}(1_B)] \xrightarrow{k \to \infty} P_\mu(B)$. Sei $f(y) := E_y(1_B)$, dann

ist $E_x(f(Y_{k-n})) \xrightarrow{k \to \infty} P_\mu(B) \overset{S202}{=} \int E_z(1_B)\, \mu(dz) = \int f(z)\, d\mu(z)$

die Behauptung die wir schon in ii) gezeigt haben.

Mit Lebesgue folgt $P_\mu(A \cap \Theta^{-k}B) = \lim_{k \to \infty} E_\mu(1_A \, E_{X_n}(E_{X_{k-n}}(1_B)))$

$$= E_\mu(1_A \lim_{k \to \infty} \ldots) = P_\mu(A)\, P_\mu(B)$$

Nun wird die Aussage auf alle $A \in \mathcal{A}$ erweitert. Die Menge $\mathcal{D}$ aller ~~A~~ für die die Konvergenz gilt ist ein Dynkin-System. Seien $A_i \in \mathcal{D}$ pw. disjunkt und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ also $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) \to P(A)$.

Sei $\varepsilon > 0$ und N so groß dass $P(A \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} A_i}_{A_N}) = P(A) - P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) < \varepsilon$. ~~Für~~ Betrachte:

$\boxed{-P(A)P(B)}$

$$P(A \cap \Theta^{-k}B) = P((A \setminus A_N \,\dot\cup\, A_N) \cap \Theta^{-k}B) = P(A \setminus A_N \cap \Theta^{-k}B) + P(A_N \cap \Theta^{-k}B)$$

$$-P(A)P(B) = P(A \setminus A_N \cap \Theta^{-k}B) + P(A_N \cap \Theta^{-k}B) - P(A \setminus A_N \,\dot\cup\, A_N)P(B)$$

$$= P(A \setminus A_N \cap \Theta^{-k}B) + P(A_N \cap \Theta^{-k}B) - P(A \setminus A_N)P(B) - P(A_N)P(B)$$

$\leq$

$$\Rightarrow |P(A \cap \Theta^{-k}B) - P(A)P(B)| \leq \underbrace{P(A \setminus A_N \cap \Theta^{-k}B)}_{< \varepsilon} + |\underbrace{P(A_N \cap \Theta^{-k}B) - P(A_N)P(B)}_{\xrightarrow{k \to \infty} 0 \text{ weil } A_N \in \mathcal{D}.}| + \underbrace{P(A \setminus A_N)P(B)}_{< \varepsilon}$$