Aufgabe 1 $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $P(X_i = 2^i) = P(X_i = -2^i) = \frac{1}{2i^2}$, $P(X_i = 0) = 1 - \frac{2}{i^2}$

Beh: $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Martingal. Bew: Setze $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

Dann $E(Y_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) = E(Y_{n-1} + X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) = E(Y_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) + E(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1})$

1) Y_{n-1} $\mathcal{A}_{n-1}$-mb

2) X_n unabh. von $\mathcal{A}_{n-1}$

$\overset{1), 2)}{=} Y_{n-1} + E(X_n) = Y_{n-1} + 2^n \cdot \frac{1}{2n^2} + (-2^n) \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$

$= Y_{n-1}$ Induktiv erhält man wie üblich $E(Y_n \mid \mathcal{A}_k) = Y_k$ $\square$

Beh: $\lim_{n \to \infty} Y_n = Y_\infty$ existiert P-f.s.

Bew: Betrachte $A_i := \{X_i \neq 0\}$. Damit gilt:

$\sum_{i=0}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_i \neq 0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty \xrightarrow[\text{Cantelli}]{\text{Borel}}$

brauche hier die Unabhängigkeit nicht

$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq n} \{X_i \neq 0\}) = 0$. Sei nun $\omega \in \Omega$.

Falls $\omega \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ definiere $Y_\infty := 0$. Falls $\omega \notin$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ ist gilt also $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\geq n} \{X_i = 0\}$, also

gibt es $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ mit $X_i(\omega) = 0$ f. alle $i \geq n_0(\omega)$.

Damit ist $Y_\infty := Y_{n_0(\omega)}(\omega) = Y_i(\omega)$ f. alle $i \geq n_0$

Insgesamt also Y_∞ P-fast-sicher konstant. $\square$

<u>Beh</u> $E(|Y_n|) = \infty$ <u>Bew</u> $E(|Y_n|) = \int_\Omega |Y_n| \, dP$

$$= \int_{\{Y_{n-1} \geq 0\}} |Y_n| \, dP + \int_{\{Y_{n-1} < 0\}} |Y_n| \, dP \geq \underbrace{\int_{\{Y_{n-1} \geq 0\} \cap \{X_n = 2^n\}} |Y_n| \, dP}_{\Rightarrow |Y_n| \geq 2^n} + \underbrace{\int_{\{Y_{n-1} < 0\} \cap \{X_n = -2^n\}} |Y_n| \, dP}_{|Y_n| \geq 2^n}$$

$$\geq 2^n \int_{\{X_n = 2^n\} \cup \{X_n = -2^n\}} 1 \, dP = 2^n \cdot 2 \cdot P(X_n = 2^n) = 2^n \frac{2}{2n^2} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

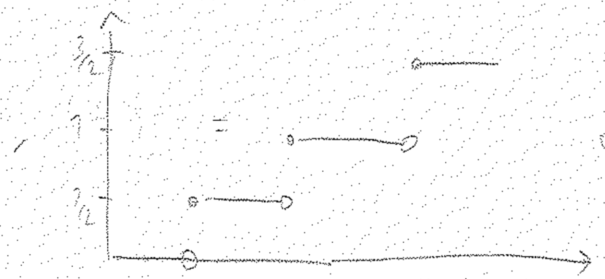
$\square$

<u>Beweisbeg</u>: 8.5.3. (fs-Martingalkonv.satz)

$$\sup E(|X_i|) < \infty \Rightarrow X_\infty = \lim_{n \to \infty} X_n \text{ ex. } P\text{-f.s.}$$

↯ Aufgabe 1

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ $U_m(a,b,T) \overset{B7}{\underset{A3}{=}} \inf\{ n \geq 0 \mid \varphi_m$ überquert $[a,b]$ nicht $n+1$-mal vor $T\}$, $\varphi_m(t) := \varphi\left(\frac{\lfloor 2^m t \rfloor}{2^m}\right)$



$\varphi_1(t)$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Satz 8.5.2: Doob's}} \\ \text{Upcrossing Inequality} \\ (b)\ \mathbb{E}(U(a,b,T)) \leq \mathbb{E}((X_T - a)^+) \\ \text{zeigt man über } \varphi \\ U_m \text{ welche mit } \varphi_m(t) := X_t(\omega) \end{array}}$

<u>Beh</u> $U_m(a,b,T) \leq U(a,b,T)$ <u>Bew</u> φ_m habe n-Upcrossings

also gibt es $0 < s_1 < t_1 < \dots < t_n < T$ mit

$a > \varphi_m(s_i) = \varphi\left(\frac{\lfloor 2^m s_i \rfloor}{2^m}\right)$ und $b < \varphi_m(t_i) = \varphi\left(\frac{\lfloor 2^m t_i \rfloor}{2^m}\right)$. Also

$0 < \frac{\lfloor 2^m s_1 \rfloor}{2^m} < \frac{\lfloor 2^m t_1 \rfloor}{2^m} < \dots < \frac{\lfloor 2^m t_n \rfloor}{t_n} < 0$ und φ hat auch

mindestens n Upcrossings.

kann nicht $=$ sein, denn φ hat dort unterschiedliche Funktionswerte □

Beh $U_m(a,b,T) \leq U_{m+1}(a,b,T)$ Bew Es gilt $\varphi_{m+1}\left(\frac{\lfloor 2^m t \rfloor}{2^m}\right)$

$= \varphi\left(\frac{\left\lfloor 2^{m+1} \cdot \frac{\lfloor 2^m t \rfloor}{2^m} \right\rfloor}{2^{m+1}}\right) = \varphi\left(\frac{\lfloor 2 \lfloor 2^m t \rfloor \rfloor}{2^{m+1}}\right) = \varphi\left(\frac{2 \lfloor 2^m t \rfloor}{2^{m+1}}\right) = \varphi_m(t)$

Also $\varphi_m(t) = \varphi_{m+1}\left(\frac{\lfloor 2^m t \rfloor}{2^m}\right) = \varphi\left(\frac{\lfloor 2^m t \rfloor}{2^m}\right)$, also folgt die Beh wie bei φ $\square$

Beh $U(a,b,T) \geq K \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : U_m(a,b,T) \geq K$

Bew Wenn $U(a,b,T) \geq K$ ist, gibt es $0 < s_1 < t_1 < \dots < t_K < T$ mit $\varphi(s_i) < a$ und $\varphi(t_i) > b$. Wähle nun $s_{m,i} := \frac{\lfloor 2^m s_i \rfloor}{2^m} \downarrow s_i$ und $t_{m,i} := \frac{\lfloor 2^m t_i \rfloor}{2^m} \downarrow t_i$. Also gibt es m gross genug so dass $0 < s_1 < s_{m1} < t_1 < t_{m1} < \dots < t_K < t_{mK} < T$.

$$E\left(\sup U_n\right) \underset{U_n \nearrow}{\leq} \sup E(U_n) \leq \frac{1}{b-a} E\left((X_{-1}-a)^+\right) \underset{\substack{X_{-1} \in \mathcal{L}^1 \\ \text{da Submartingal}}}{<} \infty$$

Also folgt $U := \sup U_n < \infty$ P-f.s.

$\boxed{2}$ U aus $\boxed{1}$ ist Anzahl Upcrossings von $(X_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ und wie im B7 A3 (i) folgt dass $X_{-\infty} := \lim_{n \to -\infty} X_n \in [-\infty, \infty]$ existiert.

$\boxed{3}$ $$E(X_{-\infty}^+) = E\left(\lim_{n\to\infty} X_{-n}^+\right) = E\left(\varliminf_{n\to\infty} X_{-n}^+\right)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} E(X_{-n}^+) \leq \varliminf_{n\to\infty} E\left(X_{-n} \cdot 1_{\{X_{-n} \geq 0\}}\right)$$

$$\overset{\text{SubM}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} E\Big(\underbrace{E(X_{-1} \mid \mathcal{A}_{-n})}_{\mathcal{A}_{-n}\text{-mb}} \underbrace{1_{\{X_{-n} \geq 0\}}}_{\mathcal{A}_{-n}\text{-mb}}\Big) \underset{\substack{\text{Filtration} \\ \mathcal{A}_{-n} \subset \mathcal{A}_{-1}}}{\overset{\text{Version}}{=}} \varliminf_{n\to\infty} E\Big(\underbrace{X_{-1}}_{\mathcal{A}_{-1}\text{-mb.}} \underbrace{1_{\{X_{-n} \geq 0\}}}_{\mathcal{A}_{-n}\text{-mb}}\Big)$$

$\leq E(|X_{-1}|) < \infty$. Also $X_{-\infty} < \infty$ P-f.s. $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ $\boxed{\text{Satz 8.5.5.1}}$ Bsp: $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ sei ein $(\mathcal{A}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ Submartingal. Dann $X_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty} X_n \in [-\infty,\infty)$ existiert

P-f.s.

Bew: $\boxed{1}$ Sei $(Y_1,\dots,Y_n) := (X_{-n},\dots,X_{-1})$ und $U(a,b,n)$ die Zahl der Upcrossings durch $(Y_i)_{1\le i\le n}$ von $[a,b]$.

Γ Doob: $(X_t)_{t\ge 0}$ rst Sub, $t_0\in(0,\infty)$, $U(a,b,t_0)(\omega)$ rel zu $t\mapsto X_t(\omega)$

1.: $(b-a)\, E(U(a,b,t_0)) \le E((X_{t_0}-a)^+)$

hier: $(b-a)\, E(U(a,b,n)) \le E((Y_n-a)^+)$ ⌋

Also nach Doob (8.5.2) gilt: $(b-a)\, E(U(a,b,n)) \le$

$E((Y_n-a)^+) = E((X_{-1}-a)^+)$. Also mit $U_n := U(a,b,n)$