$\boxed{3.1.a}$ Beh A abgeschl. oBdA Bew $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig $\Rightarrow A = (\|\cdot\|_\infty^{-1})(\{1\}) \subset \mathbb{R}^n$ ist abg., da $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abg. ist. $\square$

Beh $A = \partial A$ Bew: „$\supset$" ~~zuerst~~ $\bar{A} = A = \partial A \cup A \Rightarrow \partial A \subset A$

„$\subset$" Sei $x \in A$ und, $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $\boxed{1}$ $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, $\boxed{2}$ $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.

$\boxed{1}$ ist klar wg. $x \in B_\varepsilon(x)$ $\boxed{2}$ $y := x + (\varepsilon/2, \ldots, \varepsilon/2) \Rightarrow \|y\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i + \varepsilon/2| = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \neq 1$, $\|y - x\|_\infty = \|(\varepsilon/2, \ldots, \varepsilon/2)\|_\infty = \varepsilon/2$

$\Rightarrow y \in B_\varepsilon(x) \wedge y \notin A$ $\square$

Beh $\mathring{A} = \emptyset$ Bew: $\mathring{A} = A \setminus \partial A$ $\square$

$\boxed{3.1.b.}$ Die Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2$ ist

wegen $f(x_1 x_2) = \pi_1(x_1,x_2) \cdot \pi_2(x_1,x_2)$ stetig.

1 Beh A abgeschlossen 1 Bew $(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ abg. $\Rightarrow A = f^{-1}((-\infty,1])$

abgeschl.

2 Beh $\mathring{A} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1,x_2) = x_1 x_2 < 1\} =: M$

$\boxed{a}\ \boxed{x_1, x_2 > 0}$ $\boxed{b}\ \boxed{x_1, x_2 < 0}$

2 Bew : M offen denn $M = f^{-1}((-\infty,1))$. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$f(x_1,x_2) = 1$ und $\varepsilon > 0$. Dann $(x_1 \overset{\boxed{a}}{+}_{\boxed{b}-} \varepsilon/2, x_2) \in B_\varepsilon(x_1,x_2)$ weil

$\|(x_1,x_2) - (x_1+\varepsilon/2, x_2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\varepsilon/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \varepsilon/2$ und $f(x_1+\varepsilon/2, x_2) = (x_1+\varepsilon/2)\, x_2$

$= x_1 x_2 + \frac{\varepsilon x_2}{2} = 1 \overset{\boxed{a}}{+}_{\boxed{b}\,=} \frac{\varepsilon x_2}{2} \overset{\boxed{a}\ \boxed{x_2>0}}{\underset{\boxed{b}\ \boxed{x_2<0}}{>}} 1$, also $(x_1, x_2) \in B_\varepsilon(x_1,x_2) \cap M^c$

Also $M \subset A$ größte offene Menge $\Rightarrow M = \mathring{A}$ $\square$

Wegen $\mathring{A} = M \subsetneq A$ ist A nicht offen.

$\boxed{3.2.a}$

$$f(\overbrace{x_1\ x_2\ x_3}^{=:\,\underline{x}}) = \underbrace{\underbrace{\pi_2(\underline{x})}_{\text{Pr. stetig}} \cdot \pi_2(\underline{x}) \cdot \pi_2(\underline{x}) \cdot \pi_2(\underline{x})}_{\text{"}\cdot\text{" stetig}} \circ \underbrace{\sin(\pi_3(\underline{x}))}_{\text{stetig}}$$

$$- \cos(\pi_2(\underline{x}))\, \pi_3(\underline{x})^6 + \exp(\arctan(\pi_2(\underline{x}))) \quad \overset{\text{alle}}{\underset{\text{Teile stetig}}{\Longrightarrow}} \quad f \text{ stetig}$$

$\boxed{3.2.b}$ In $(x,y) \neq (0,0)$ ist g als Komp. stetiger F. stetig.

In $(x,y) = 0$ gilt: $f(1/n, 1/n) = \dfrac{1/n \cdot 1/n^2}{1/n^2 + 1/n^4} = \dfrac{1/n^3}{\frac{n^2+1}{n^4}} = \dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$f(1/n^2, 1/n) = \dfrac{1/n^2 \cdot 1/n^2}{1/n^4 + 1/n^4} = \dfrac{1/n^4}{\frac{2}{n^4}} = \dfrac{1}{2}$, $(1/n, 1/n) \to (0,0)$,

$(1/n^2, 1/n) \to (0,0)$ $\leadsto$ g nicht stetig in $(0,0)$ $\square$

$\boxed{3.2.c}$ Ausserhalb von $(0,0)$ ist h stetig als Komp. stet. Funktionen. In $(0,0)$ auch, denn: für $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

gilt: $$h(x,y) = \frac{|r\cos\varphi|\, r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \overset{\boxed{r>0}}{=} \frac{r^3}{r^2} \cdot \cos^2\varphi \sin\varphi$$

$$= r\cos^2\varphi \sin\varphi \xrightarrow{r\to 0} 0$$ oder ohne Polarkoordinaten:

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow |h(x,y) - 0| =$$

$$|h(x,y)| = |x| \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|x|}{2} \xrightarrow{x,y\to 0} 0$$

$\boxed{3.3}$ $C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\| f \|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \overset{p=1}{=} \int_0^1 |f(t)| dt$

$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

1 Beh: L ist wohldef.

1 Bew: Zu zeigen: $f \in X \Rightarrow L(f) \in C[0,1]$

$f \in X = C[0,1] \Rightarrow \int_0^x f(t) dt$ für $x \in [0,1]$ existiert und stetig in x nach Hauptsatz Dif + Int $\square$

2 Beh: L linear

2 Bew: zz: $L(f+g) = L(f) + L(g)$. Da auf beiden Seiten Abb. stehen ist zu zeigen: $\forall x \in [0,1]: L(f+g)(x) = (L(f) + L(g))(x)$:

$L(f+g)(x) = \int_0^x f(t) + g(t) \, dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt$

$= L(f)(x) + L(g)(x) = (L(f) + L(g))(x)$ $\square$

<u>3 Bel</u> L ist stetig

<u>3 Bew</u> Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$\| f - s \|_1 < \delta \Rightarrow \| L(f) - L(s) \|_\infty < \varepsilon$. Sei also $f, s \in X$, $\varepsilon > 0$.

Def. $\delta := \varepsilon$: Dann gilt: $\| L(f) - L(s) \|_\infty = \| L(f-s) \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x f(t) \right|$

$\leq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |(f-s)(t)| \, dt \overset{\nearrow}{=} \int_0^1 |(f-s)(t)| \, dt = \| f - s \|_1 < \delta = \varepsilon$

<u>4 Bel</u> $\| L \| = 1$

<u>4 Bew</u> Def. gemäß $\| L \| = \sup_{\|f\|_1 = 1} \| L(f) \|_\infty$

$\boxed{\text{„}\leq\text{"}}$

$\| L(f) \|_\infty \leq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |f(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t)| \, dt = \| f \|_1 \Rightarrow \| L \| = \sup_{\|f\|_1 = 1} \| L(f) \|_\infty$

$\leq \sup_{\|f\|_1 = 1} \| f \|_1 = 1$

$\boxed{\text{„}\geq\text{"}}$ Für $g \equiv 1$ gilt $\| g \|_1 = \int_0^1 1 = 1$

$\| L \| = \sup_{\|f\|_1 = 1} \| L(f) \|_\infty \overset{g \equiv 1}{\geq} \| L(g) \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \underbrace{g(t)}_{=1} \, dt \right| = 1$ $\square$

$\boxed{3.4.\ a}$ **Beh** $f: D \to \mathbb{R}$ stetig $\Longleftrightarrow$ $\{x \in D \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in D \mid f(x) < \alpha\}$ offen in D

Bew „$\Rightarrow$" $\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$, $\{x \in D \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$

„$\Leftarrow$" Sei $x \in D$, $\varepsilon > 0$. Zz: $\exists \delta > 0$: $\boxed{d(x,y) < \delta}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sehe dann: $\beta := f(x)$, $\alpha_1 := \beta - \varepsilon/2$,

$\alpha_2 := \beta + \varepsilon/2$. $\Rightarrow$ $f(x) = \beta > \alpha_1$, $f(x) < \alpha_2$ $\Rightarrow$ $x \in \{f > \alpha_1\} \cap$

$\{f < \alpha_2\}$ $\overset{\text{offen in } D}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \delta > 0$: $\underset{\{y \in D \mid d(y,x) < \delta\}}{\underset{\shortparallel}{B_\delta(x)}} \subset \{f > \alpha_1\} \cap \{f < \alpha_2\}$ $\Rightarrow$

$\forall y \in B_\delta(x)$: $|f(x) - f(y)| = |\beta - \underbrace{f(y)}_{\in (\alpha_1 = \beta - \varepsilon/2,\ \beta + \varepsilon/2 = \alpha_2)}| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ $\square$

$\boxed{3.4.b}$ Beh $\Gamma(f)$ abgeschlossen Bew: Zu zeigen ist: $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma(f)$

mit $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \in X \times Y \Rightarrow \alpha \in \Gamma(f)$. Sei $\alpha_n = (x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \underset{\substack{\| \\ (x,y) \in}}{\alpha} \in X \times Y$

$\Rightarrow 0 \leftarrow d\big((x_n, f(x_n)), (x, y)\big) = \max\{d_1(x_n, x), d_2(f(x_n), y)\}$

$d_i \geq 0$

$\Rightarrow d_1(x_n, x) \to 0, \quad d_2(f(x_n), y) \to 0 \xRightarrow{f \text{ stetig}} d_2(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$

$\cancel{\Rightarrow}$ $y = f(x) \Rightarrow \alpha = (x, y) = (x, f(x)) \in \Gamma(f)$ $\square$

$> plot3d\left(\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4}, x=-1..1, y=-1..1\right)$