$\boxed{4.2}$. Aus PÜ wissen wir: $x \in \overline{M} \Leftrightarrow d(x,M) = 0$

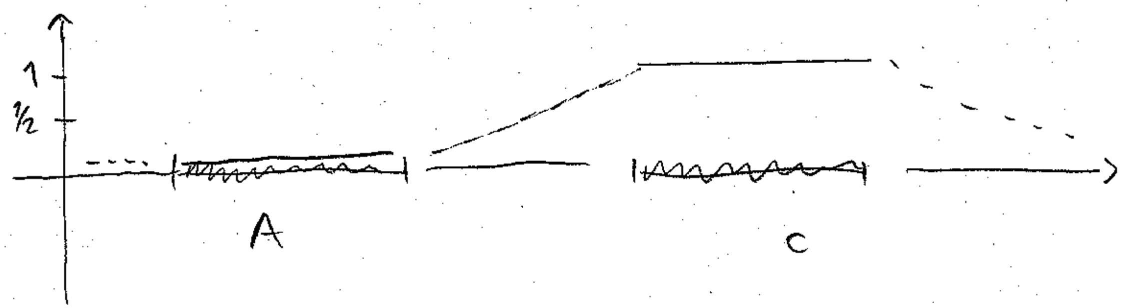
$\boxed{a}$ i) $\boxed{1}$ Die Abbildung $d(x,A) := \inf\{ d(x,y) \mid y \in A \}$ ist nach VL stetig, also ist g auf $\mathbb{D}(g)$ stetig. Es gilt auch

$\mathbb{D}(g) = X$ denn: $d_A(x) + d_C(x) = 0 \Rightarrow d_A(x) = d_C(x) = 0 \overset{\text{PÜ}}{\Rightarrow}$

$x \in \overline{A} \overset{\text{abg}}{=} A \wedge x \in \overline{C} = C \Rightarrow x \in A \cap C = \emptyset$ ↯. $\boxed{2}$ $0 \leq g \leq 1$ ✓

ii) $g(x) = 0 \overset{\boxed{a}\,i)\,\boxed{1}}{\Leftrightarrow} d_x(A) = 0 \overset{\text{PÜ}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{A} = A$

iii) $g(x) = 1 \Leftrightarrow d_A(x) = d_A(x) + d_C(x) \Leftrightarrow d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C = \overline{C}$



$\boxed{b}$ $U := g^{-1}((-\infty, 1/2))$ offen 2.3.5)

$V := g^{-1}((1/2, \infty))$ — " —

$A \subset U$: $x \in A \Rightarrow g(x) = 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in U$

$C \subset V$: $x \in C \Rightarrow g(x) = 1 > 1/2 \Rightarrow x \in V$

$U \cap V = \emptyset$: $x \in U \cap V \Rightarrow g(x) < 1/2 \wedge g(x) > \frac{1}{2}$ ↯

$\boxed{4.3.a}$ 1 <u>Beh</u>: $f([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$ <u>Bew</u> Wegen $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$

ist f monoton fallend. Außerdem $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$, $f(1) = \frac{1}{2}$.

<u>Annahme</u> $\exists x_0 \in \boxed{[\frac{1}{2},1]}: f(x_0) > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x_0, \ \frac{2}{3} = f(\frac{1}{2}) < 1 < f(x_0)$ ↯ $\boxed{\text{zu } f\downarrow}$

<u>Annahme</u> $\exists x_0 \in [\frac{1}{2},1]: f(x_0) < \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \leq 1, \ f(x_0) < \frac{1}{2} = f(1)$ ↯

2 <u>Beh</u> f ist Kontraktion <u>Bew</u> Wohldefiniertheit aus 1 Beh.

Außerdem $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \left|\frac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)}\right| = \frac{|x-y|}{\underbrace{(1+x)}_{>1}\underbrace{(1+y)}_{>1}} < 1 \cdot |x-y|$ $\square$

b Nach dem FP von Banach gibt es also einen Fixpunkt x^*

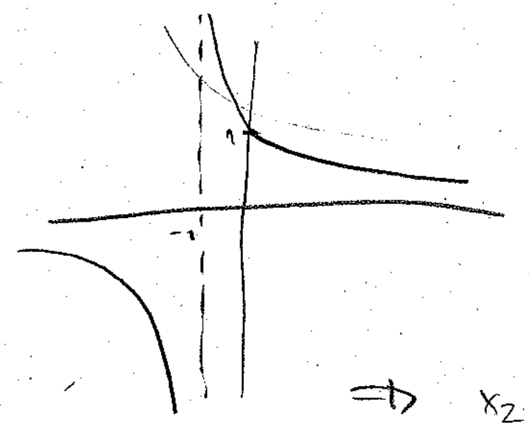
wenn $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ also : $f(x^*) = x^* \iff \frac{1}{1+x^*} = x^* \iff$

$x^* = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $x^* = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \notin [\frac{1}{2}, 1]$. Sei $x' := \lim x_n$. Dann:

$$f(\lim x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+x'} \overset{\text{Eindeutigkeit}}{\underset{\text{FP}}{\Longrightarrow}} x' = x^*.$$

$$\| $$

$$f(x')$$



<u>Untersuche Startwerte $x_0 > -1$</u>

1 $x_0 \in (-1, \frac{1}{2}) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{1+\underbrace{x_0}_{<1/2}} > \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{1+\underbrace{x_1}_{>2/3}} < 3/5$

<u>und</u> $x_2 > 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{1+\underbrace{x_2}_{\substack{<3/5 \\ >0}}} \begin{matrix} > 5/8 \\ < 1 \end{matrix} \in [5/8, 1] \subset [1/2, 1]$

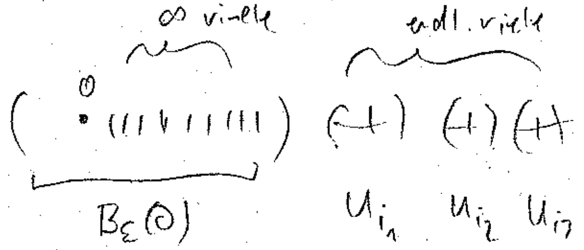
$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 3} \in [1/2, 1] \Rightarrow \exists!$ FP

$\boxed{2}$ $x_0 > 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{1+x_0} \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\underbrace{1+x_1}_{<3/2}} > \frac{2}{3}$ $\overset{\text{wie } \boxed{1}}{\Longrightarrow} \exists!\, FP$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{1+x_2}$

$\boxed{4.4a}$ $M = \{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. <u>Beh</u> M kompakt

<u>Bew</u> Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene ÜB von M, also $U_i \subset \mathbb{R}$ offen, $M \subset (U_i)_{i \in I}$. $\Rightarrow \exists\, i_0 \in I : 0 \in U_{i_0} \overset{U_{i_0} \text{ off.}}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset U_{i_0} \overset{\text{Archimedes}}{\Longrightarrow} \exists\, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$. Zu jedem $0 < n < N$ gibt es $i_n \in I$ mit $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$, also ist $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{N-1}}\}$ eine offene TÜ von $(U_i)_{i \in I}$



$\boxed{\text{Aufgabe 4.4.5}}$ <u>Beh</u> $A, B \subset (X, d)$ kpkt $\Rightarrow$ $A \cup B$ kpkt.

<u>Bew</u> Sei $(U_j)_{j \in J}$ ~~endl.~~ o Ü von $A \cup B$. ~~Dann~~ Dann ist $(U_j)_{j \in J}$ sowohl eine oÜ von A als auch B. Also gibt es jeweils endliche TÜ $(U_j)_{j \in K}$, $(U_j)_{j \in L}$ von A bzw. B.

Damit ist $(U_j)_{j \in K \cup L}$ endl. TÜ von $A \cup B$ $\square$