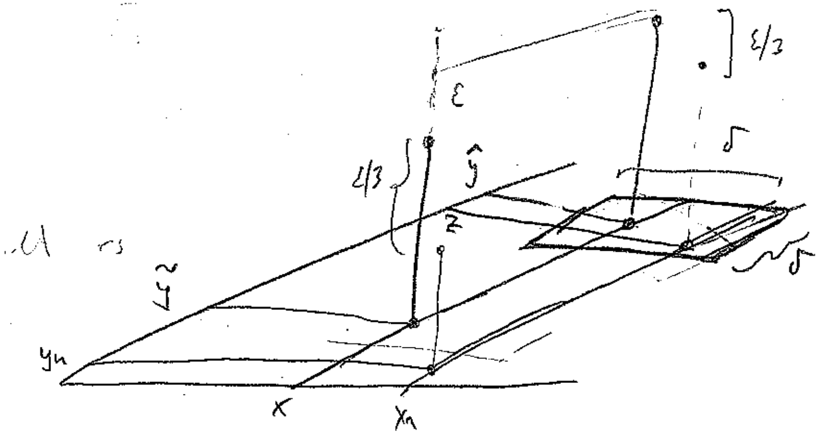
Aufgabe 5.1

$F(x) = \sup_{y \in J} f(x,y)$



[1] Sei $(x_n) \in I$ mit: $x_n \to x$

[2] $F(x) = f(x,\hat{y})$, $\hat{y} \in J$

$F(x_n) = f(x_n, y_n)$, $y_n \in J$ $\Rightarrow$ $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ mit: $y_{n_k} \to \tilde{y}$

[3] $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x,\tilde{y})$

[4] <u>Annahme:</u> $f(x,\hat{y}) = f(x,\tilde{y}) + \varepsilon \quad (\exists \varepsilon > 0)$

$\Big(\neg$ Annahme: $F(x_{n_k}) \to f(x,\tilde{y}) = f(x,\hat{y}) = F(x) \Big)$

[5] f stetig in $(x,\hat{y})$: $\exists \delta > 0 : \|(s,t) - (x,\hat{y})\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(s,t) - f(x,\hat{y})| < \varepsilon/3$

[6] aus [3]: $\forall k \geq N: |f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x,\tilde{y})| < \varepsilon/3$

[7] $\exists k \geq N: |x_{n_k} - x| < \delta$, $\Rightarrow \exists z \in J: \|(x_{n_k}, z) - (x,\hat{y})\|_\infty < \delta$

[8] $f(x_{n_k}, z) \overset{[5]}{>} -\varepsilon/3 + f(x,\hat{y}) \overset{[4]}{=} \frac{2}{3}\varepsilon + f(x,\tilde{y}) \overset{[6]}{>} \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} + f(x_{n_k}, y_{n_k}) \overset{[2]}{>} \frac{1}{3}\varepsilon + f(x_{n_k}, z)$ ↯

$\boxed{5.1.}$ ~~Bdg~~ $I, J \subset \mathbb{R}$ kpkt, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow$

$F(x) = \sup_{y} f(x,y)$, ist $F: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Bew $\boxed{A}$ Elegante Version: Angenommen $\exists\, \varepsilon > 0$, $x \in I$ und $x_n \to x$, $(x_n) \subset I$ so dass $|F(x_n) - F(x)| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da J kompakt ist folgt

$\boxed{1}$ $\forall x_n \in I\ \exists\, y_n \in J: F(x_n) = f(x_n, y_n)$

$\boxed{2}$ $\exists\, \tilde{y} \in J: F(x) = f(x, \tilde{y})$ $\boxed{3}$ $\exists\, (y_{n_k}) \subset J$ TF von (y_n) mit

$y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y$. Dann

$$F(x) - F(x_{n_j}) \overset{\boxed{2}}{\leq} \overbrace{f(x,\tilde{y}) - f(x_{n_k}, \tilde{y})}^{\text{weil sup}} \underset{\boxed{3}}{\xrightarrow{k\to\infty}} 0 \quad (f \text{ stetig})$$

$$F(x_{n_j}) - F(x) \overset{\boxed{1}}{\leq} f(x_{n_j}, y_{n_j}) - f(x,y) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad (f \text{ stetig})$$

Also $|F(x_{n_k}) - F(x)| \longrightarrow 0$ ↯ $\square$

5.2.b $\forall k \in \mathbb{N}: (k, 1/k) \in A_2 \Rightarrow \|(k, 1/k)\|_2 = \sqrt{k^2 + 1/k^2} \geq \sqrt{k^2} = k \to \infty \Rightarrow A_2$ unbeschränkt $\overset{HB}{\Rightarrow} A_2$ nicht kompakt

5.2.c Betrachte die Abb. $L: A_3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ def durch

$L(p) := (a_0, a_1, a_2) \subset [0,1]^3$

1. L ist linear: $L(p+q) = L\left((a_{0,p} + a_{1,p}X + a_{2,p}X^2) + (a_{0,q} + a_{1,q}X + a_{2,q}X^2)\right)$

$= (a_{0p} + a_{0q}, \ldots, a_{2p} + a_{2q}) = L(p) + L(q)$, genauso $L(\lambda p) = \lambda L(p)$

2. L ist stetig: $\sup_{\|p\|_\infty \leq 1} \|L(p)\|_2 = \sup_{\|p\|_\infty \leq 1} \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2} \leq \sup_{a_i \in [0,1]\ \|p\|_\infty \leq 1} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

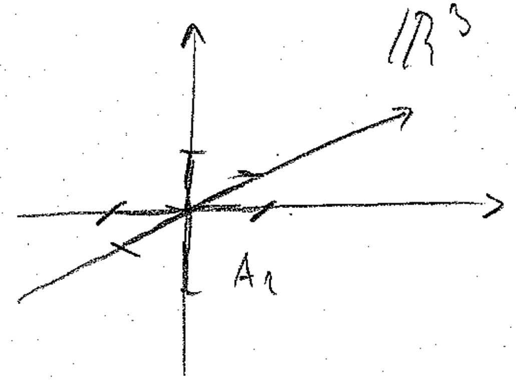
$\Rightarrow L$ stetig

$\boxed{5.2a}$ Sei $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 x_3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Weil $\{0\} \subset \mathbb{R}$ abg. ist ~~stetig~~ f stetig ist, ist $f^{-1}(0) =: B \subset \mathbb{R}^3$ abg.

Sei $g(x_1, x_2, x_3) := \max_{i=1,\dots,3} |x_i|$. Da g stetig ist, ist $g^{-1}((-\infty, 1]) = A$ abg. in $\mathbb{R}^3$. Also $A_1 = A \cap B$ abg. Es gilt $B \subset B_2(0)$:

$x \in B \Rightarrow \max |x_i| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{3} < 2 \Rightarrow x \in B_2(0)$.

Daher ist $A_1 = A \cap B \subset B \subset B_2(0)$ beschränkt. Also nach Heine-Borel kompakt.



$L : [0,1]^3 \longrightarrow C([0,1])$ durch $L(a_0, a_1, a_2) := p$

$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 =: p(x)$

$\boxed{1}$ L linear, denn: $L(\underline{a} + \underline{b}) = p_{\underline{a}} + p_{\underline{b}}$, $L(\lambda \underline{a}) = \lambda p_{\underline{a}}$

$\boxed{2}$ $([0,1]^3, \|\cdot\|_2)$ und $(A_3, \|\cdot\|_\infty)$ sind metrische Räume

$\boxed{3}$ L ~~ist~~ stetig wg. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ und, $\boxed{2}$ $\sup\limits_{\|\underline{a}\|_2 = 1} \| L(\underline{a}) \|_\infty = \sup\limits_{\|\underline{a}\|_2 = 1} \sup\limits_{x \in [0,1]} | a_0 + a_1 x + a_2 x^2 |$

$\leq \sup\limits_{\|\underline{a}\|_2 = 1} \sup\limits_{x \in [0,1]} a_0 + \sup\limits_{x \in [0,1]} a_1 x + \sup\limits_{x \in [0,1]} a_2 x^2 \underset{a_i \in [0,1]}{\leq} 3$

$\boxed{4}$ $L([0,1]^3) = A_3^* \overset{\boxed{3}}{\Longrightarrow} A_3^*$ kompakt

$\boxed{5.3\,a}$ f stetig, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ kpkt $\Rightarrow$ f besitzt min und max.

$\boxed{5.3.\,b}$ $\boxed{1}$ $x = 0$: ✓ $\boxed{2}$: $x \neq 0$: $\frac{1}{\|x\|^n} \prod_{j=1}^{n} x_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x\|} =$

$$f\left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in S^{n-1}}\Big) \underset{\boxed{a}}{\leq} C \quad \text{für ein } C > 0$$

$\boxed{5.4.\,a}$ Beh $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ $f(A) := A^T A$ stetig

Bew Identifiziere $\mathbb{K}^{n\times n} = \mathbb{K}^{n^2}$ via $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, \ldots, a_{nn})$

$f(A) = f(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \left(\left(\sum_{k,l} a_{ki}\, a_{lj}\right)\right) = \left((A^T A)_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n^2}$. Die Komponente

$f_{ij}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \sum_{k,l} a_{ki}\, a_{lj}$ sind stetig $\left(\underbrace{\|A\| = \|(a_{11}, \ldots, a_{nn})\|_2}\right)$

also ist f stetig

$\boxed{5.4.6}$ Beh $O(n)$ abg. Bew $O(n) = f^{-1}(I_n)$ aus $\boxed{a}$ und I_n

als einpunktige Menge in $\mathbb{K}^{n^2}$ abgeschlossen $\square$

Beh $O(n)$ beschränkt Bew Wegen $A^T A = I_n$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, also $$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2}_{=1}$$

$$= n \Longrightarrow \|A\| \leq \sqrt{n} \quad \forall A \in O(n) \; \square$$

Nach HB ist $O(n)$ kompakt!