1

(2) $$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \{0,1\}} \{\{(x_1, \dots, x_n, \dots) \in \Omega \mid x_i = \bar{x}_i,\ i = 1 \dots n\}\}$$

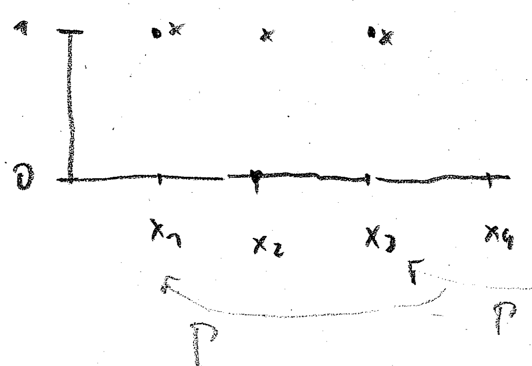
<u>Bsp</u>: $[1,1,0,1] := \{(1,1,0,1, x_5, x_6, \dots) \in \Omega \mid x_5, x_6, \dots \in \{0,1\}\} \in A$ $\quad (\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 1,\ \bar{x}_3 = 0,\ \bar{x}_4 = 1,\ n = 4)$

<u>Bsp</u>: $\underbrace{[1,1,0,1] \cup [1,1,1,0]}_{\notin A} \not\ni (1,1,1,1, x_5, x_6, \dots) \quad \forall x_5, x_6, \dots$

$\Rightarrow A$ ist kein Ring

<u>Bsp</u> $\overbrace{[1,0,1]}^{\cdot} \cap \overbrace{[1,1,1]}^{\times} = \emptyset \qquad P([1,0,1]) = p^2 \cdot (1-p)$

$P([1,1,1]) = p^3$



<u>plausibel ist:</u>

$P([1,0,1] \,\dot\cup\, [1,1,1]) := P([1,0,1]) + P([1,1,1])$

$= p^2(1-p) + p^3 = p^2 - p^3 + p^3 = p^2$

Dfn: $[x_1, \ldots, x_n] := \{ (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots) \in \Omega \mid x_i = y_i,\ i = 1 \ldots n \}$ $\quad x_i \in \{0,1\}$

$A := \{\emptyset\} \cup \{ [x_1, \ldots, x_n] \subset \Omega \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\} \}$

<u>Dfn</u> (Semiring) Sei Ω Menge. Ein Mengensystem $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt <u>Semiring</u>, falls 1) $\emptyset \in A$, 2) $A, B \in A \Rightarrow A \cap B \in A$

3) $A, B \in A \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_N \in A : A \setminus B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i$

<u>Bsp</u>: A ist Semiring

<u>Bew</u>: $A_n^x := [x_1, \dots, x_n]$. Es gilt: $A_1^x \supset A_2^x \supset A_3^x \supset \dots$ denn

sei $\xi_m \in A_m^x \Rightarrow \xi_m = (x_1, \dots, x_m, \xi_{m+1}, \dots) \Rightarrow \xi_m \in A_{m-1}^x = [x_1, \dots, x_{m-1}]$

1) $\emptyset \in A$ $\quad$ 2) $A_n^x \cap A_m^x \overset{\text{oBdA } n \geq m}{=} A_m^x \in A$, $\quad A_n^x \cap A_m^y \overset{x \neq y}{=} \emptyset$ $\quad$ 3) $A_n^x \setminus A_m^x = \emptyset$ falls $n \geq m$ und für $n \leq m$: $A_n^x \setminus A_m^x =$

$A_n^x \setminus A_1^y = A_n^x$

$= \dot{\bigcup} [x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_m]$

$(\xi_{n+1}, \dots, \xi_m) \in \{0,1\}^{m-n}$

$i > k$

mit: $\exists i : \xi_{n+i} = 1 - x_{n+i}$

<u>Satz</u> <u>Caratheodory</u> (auf Semiring) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semiring 4

und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ σ-additiv mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann gibt es

ein Maß $\bar{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0,\infty]$ mit $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Ist μ σ-endlich,

so ist $\bar{\mu}$ eindeutig.

<u>Bew</u>: $\tilde{\mathcal{A}} := \{ A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \exists N \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A} : A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i \}$. Dann

ist $\tilde{\mathcal{A}}$ ein Ring. Dfn $\hat{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow [0,\infty]$ durch $\hat{\mu}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i\right)$

$:= \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)$. Da μ endlich additiv, ist es auch $\hat{\mu}$. Außerdem

nächste Seite

$\hat{\mu}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ für alle $A_n, n \in \mathbb{N}$, pw disjunkt,

und $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \tilde{\mathcal{A}}$. Aus Caratheodory auf Ringen folgt Ex von

$\bar{\mu} : \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \sigma(\mathcal{A}) \to [0,\infty]$ mit $\bar{\mu}|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \hat{\mu}$ und $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \hat{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

und die Eindeutigkeit falls $\bar{\mu}$ σ-endlich.

<u>Bew von ⊛</u>: Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ gibt es $B_1, \dots, B_M \in \mathcal{A}$ mit

$\dot{\bigcup}_{i=1}^{M} B_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$. Aus $B_i \subset \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$ folgt $B_m = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (B_m \cap A_i)$

also $\mu(B_m) \overset{\mu\ \sigma\text{-add}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_m \cap A_i)$ für alle $m \in \{1, \dots, M\}$. Also

$$\tilde{\mu}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \tilde{\mu}\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{M} B_i\right) \overset{\text{Def } \tilde{\mu}}{=} \sum_{i=1}^{M} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_m \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{M} \mu(B_m \cap A_i) \underset{A_n = \dot{\bigcup}_{m=1}^{M} B_m \cap A_n}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

□

In ü2 ist jetzt wieder $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{[x_1, \dots, x_n] \subset \Omega \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in \{0,1\}\}$

und $\mu([x_1, \dots, x_n]) := p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}$. Um Caratheodory II

anwenden zu können bleibt zu zeigen: 1) μ endlich additiv

2) μ σ-additiv.

μ endlich additiv: seien $A_i^{x^{(i)}}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $x^{(i)} \in \Omega$ pw. disjunkt

zz ist $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{N} A_i^{x^{(i)}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i^{x^{(i)}})$. Dann $A_i^{x^{(i)}} = [x^{(i)}_1, \dots,$

$x^{(i)}_{k_i}]$, $i = 1 \dots N$. Sei $M := \max\{k_1, \dots, k_N\}$ und

$\tilde{\mathcal{A}}_M := \{[x_1, \dots, x_m] \in \mathcal{A} \mid m \leq M\}$. Sei $\tilde{\mu} : \{0,1\} \to [0,1]$

gegeben durch $\tilde{\mu}(0) := p$ und $\tilde{\mu}(1) := 1-p$ ein Maß und $\tilde{\mu}^M$

$: \{0,1\}^M \to [0,1]$ das Produktmaß mit $\tilde{\mu}^M(y_1, \dots, y_M) = \prod_{i=1}^{M} \tilde{\mu}(y_i)$

6

Sei $\phi_M : \tilde{A}_M \to \{0,1\}^M$ gegeben durch $\phi([x_1,\dots,x_m])$

$:= \{ (x_1,\dots,x_m, x_{m+1},\dots, x_M) \mid x_i \in \{0,1\},\ i = m+1,\dots,M \}$. Dann

gilt $\tilde{\mu}^M \circ \phi_M([x_1,\dots,x_m]) = \underbrace{p^{\sum_{i=1}^m x_i}}_{1en} \cdot \underbrace{(1-p)^{m-\sum_{i=1}^m x_i}}_{0en}$

$= \mu|_{\tilde{A}_M}([x_1,\dots,x_m]) = \mu([x_1,\dots,x_m])$. Also ist μ endlich additiv denn $\tilde{\mu}$ ist es.

μ σ-additiv   Seien $A_n \in \mathcal{A}$ pw. disjunkt mit $A := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. $\boxed{7}$

Def. $B_n := A \setminus \dot{\bigcup}_{e=1}^{n} A_e$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$.

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $B_N = \emptyset$, also $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{N} A_n$ und μ ist daher σ-additiv.

Angenommen $B_n \neq \emptyset$ f. alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $[x_1] \dot{\cup} [1-x_1]_{x_1} = \Omega$ ist entweder $B_n \cap [x_1] \neq \emptyset$ f. ∞-viele n oder $B_n \cap [1-x_1] \neq \emptyset$ für ∞-viele n. Also gibt es $x_1 \in \{0,1\}$ mit $[x_1] \cap B_n \neq \emptyset$ für ∞-viele n. Wegen $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ ist also $[x_1] \cap B_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Genauso gilt $[x_1, x_2] \dot{\cup} [x_1, 1-x_2] = \Omega$ und man erhält sukzessive $[x_1, \dots, x_k] \cap B_n \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ durch Hinzunehmen von x_k. Def. $x := (x_1, x_2, \dots)$.

$\boxed{8}$

Da $\mathcal{A}$ Semiring ist, gilt $B_n = A \setminus \bigcup_{i=1} A_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{I} C_i$ mit $C_i \in \mathcal{A}$. Wegen $B_n \cap [x_1, \ldots, x_k] \neq \emptyset$ gibt es $i \in \{1, \ldots, I\}$ mit $C_i \cap [x_1 \ldots x_k] \neq \emptyset$, also $C_i \subset [x_1 \ldots x_k]$ oder $[x_1, \ldots, x_k] \subset C_i$. Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein l_n mit $[x_1, \ldots, x_{l_n}] \subset B_n$. Also $x \in B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ~~also~~ $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{c \text{ (in } A)} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{c} = A^{c} \overset{\text{in } A}{=} \emptyset \quad \lightning$$