48 ①

$|A_k| =$ Anzahl Permutationen mit k Fixpunkten

$$= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{i!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)!}{i!} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

$\boxed{ZV: X = \#\text{ Fixpunkte eines Perm } \in \Omega}$

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{|A_k|}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{(k-1)!\,i!}$$

$=$

$k=1$: $\frac{(-1)^0}{0!\,0!} + \frac{(-1)^1}{0!\,1!} + \frac{(-1)^2}{0!\,2!} + \frac{(-1)^3}{0!\,3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{0!\,(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{0!\,(n-1)!}$

$k=2$: $\frac{(-1)^0}{1!\,0!} + \frac{(-1)^1}{1!\,1!} + \frac{(-1)^2}{1!\,2!} + \frac{(-1)^3}{1!\,3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{1!\,(n-2)!}$

$\vdots$

$k=n-1$: $\frac{(-1)^0}{(n-2)!\,0!} + \frac{(-1)^1}{(n-2)!\,1!}$ $\qquad N=1$

$k=n$: $\frac{(-1)^0}{(n-1)!\,0!}$

$= 1$ (Summe über Diagonale nur $n=N$ bleibt übrig)

Diagonalen :

$\forall: N=1,2,\dots,n$ $\quad \frac{(-1)^0}{(n-N)!\,0!} + \frac{(-1)^1}{(n-N-1)!\,1!} + \dots + \frac{(-1)^{n-N}}{0!\,(n-N)!} = \frac{(n-N)!}{(n-N)!} \sum_{j=0}^{n-N} \frac{1}{(n-N-j)!\,j!} (-1)^j\, 1^{n-N-j}$

$$= \frac{1}{(n-N)!} (-1+1)^{n-N} = \begin{cases} 0 : n>N \\ 1 = 1/(n-N)! : n=N \end{cases}$$