Aufgabe 5

$$\begin{tikzcd} & (\Omega', \mathcal{A}') \arrow[d, dashed, "f"] \\ (\Omega, \sigma(T)) \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "X"'] & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

__1. Beh:__ $\exists f: \Omega' \to \mathbb{R}$, f $\mathcal{A}'/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ m, $f \circ T = X$

__1. Bew:__ Sei $\sigma(T) := \{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ σ-Algebra auf Ω nach Aufgabe 1. Sei zunächst $X := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ eine $\sigma(T)$-Elementarfunktion mit $A_i = T^{-1}(B_i) \in \sigma(T)$. Def. nun $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}$.

Für $\omega \in \Omega$ mit $\omega \in A_j$ gilt dann $f(T(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{B_i}(T(\omega))$ $= \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(\omega) = X(\omega)$, also $f \circ T = X$.

Für $X \geq 0$ sei nun $X_n : (\Omega, \sigma(T)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine isotone Folge von mb. Elt. funktionen mit $X_n \nearrow X$. Also gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein f_n wie oben mit $X_n = f_n \circ T$.

Dann gilt $X = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n \circ T) = (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) \circ T$

$= f \circ T$. Jetzt sei $X = X^+ - X^- = f^+ \circ T - f^- \circ T$

$= (f^+ - f^-) \circ T = f \circ T$. Der Fall $X^+(\omega) = X^-(\omega) = \infty$ tritt

nicht auf, denn für $X^+(\omega) > 0$ gilt $X^-(\omega) = -\min(X(\omega), 0)$

$= 0$ $\square$