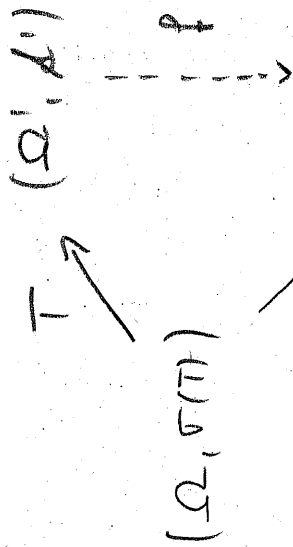


Aufgabe 5

1. Beh: $\exists f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{A}'(B(\mathbb{R}))$, $f \circ T = X$

1. Bew: Sei $\nu(T) = \{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ σ -Algebra auf Ω nach Aufgabe 1. Sei zunächst



$X := \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ eine $\nu(T)$ -Elementar

funktion mit $A_i = T^{-1}(B_i) \in \nu(T)$. D.h. nun $f := \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$

Für $\omega \in \Omega$ mit $\omega \in A_j$ gilt dann $f(T(\omega)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}(T(\omega))$
 $= \alpha_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = X(\omega)$, also $f \circ T = X$.

Für $X \geq 0$ sei nun $X_n: (\Omega, \nu(T)) \rightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ eine
wibore Folge von mb. Ekt.funktionen mit $X_n \uparrow X$. Also
gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein f_n wie oben mit $X_n = f_n \circ T$.

Dann gilt $X = \sup_{M \in \mathcal{N}} X_M = \sup_{M \in \mathcal{N}} (f_M \circ T) = (\sup_{M \in \mathcal{N}} f_M) \circ T$

$= f \circ T$. Jetzt sei $X = X^+ - X^- = f^+ \circ T - f^- \circ T$

$= (f^+ - f^-) \circ T = f \circ T$. Der Fall $X^+(w) = X^-(w) = \infty$ tritt

nicht auf, denn $f^+ X^+(w) > 0$ gilt $X^-(w) = -\min(X(w), 0)$

$= 0$

□