

Aufgabe 31 Sei $\mathcal{H} = \{f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ unb. + beschränkt, } \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0\}$ (Bord)

Beh: $\mathcal{H}$ ist monotoner VR Bew Zuerst ist $1 \in \mathcal{H}$ denn mit $f_n \equiv 1 \in C_b(S)$ gilt $\|1 - f_n\|_p = 0$. Sei nun $0 \leq f_n \in \mathcal{H}$ und $f_n \nearrow f$. Dann ist

$f \in \mathcal{H}$, denn: da $f_n \in \mathcal{H}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, gilt es $g_n \in C_b(S)$ mit $\|g_n - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ (analoges Diagonalfolge). Daher:

$$\|g_n - f\|_p \leq \|g_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \leq \frac{1}{n} + \int \|f_n - f\|_p d\mu \stackrel{1/p}{\rightarrow} 0$$

Wegen $f_n \nearrow f$, $\|f_n - f\|_p \leq 1/p \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow$ Lebesgue $\int \|f_n - f\|_p d\mu \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \|g_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bem vor ! Sei $\mathcal{H} := C_b(S)$. Dann $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und für $f, g \in \mathcal{H}$ gilt $\lambda \cdot g \in \mathcal{H}$. Mit Satz über unendliche Klassen (Hilbert) folgt

$$\sigma(C_b(S))_b \subset \mathcal{H}. \quad \text{Wegen: } S = \text{Bord } \tau\text{-A auf } S = \sigma(C_b(S)) (= \text{von } C_b(S) \text{ zu } F_n)$$

Menge der beschränkten $\sigma(C_b(S))$ -wb. Funktionen
 können erzeugt τ -Alg. auf S sein
 folgt die Behauptung.

"Diagonalfolge argument"

$$f_n \nearrow f, \quad g_n^j \rightarrow f_n \quad (j \rightarrow \infty)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt es zu $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ ein $N(n)$ so dass

$$\forall j \geq N(n) : |f_n - g_n^j| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}. \quad \text{Also auch } \forall j \geq \max\{n, N(n)\}$$

$$|f_n - g_n^j| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}. \quad \text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ kann man unterscheiden,}$$

ob $n \geq N(n)$ ist. Falls $n \geq N(n)$ setze $g_n := g_n^1$.

Fall $n < N(n)$ bestimme man die Stichproben $g_n^1, g_n^2, \dots, g_n^{N(n)}$

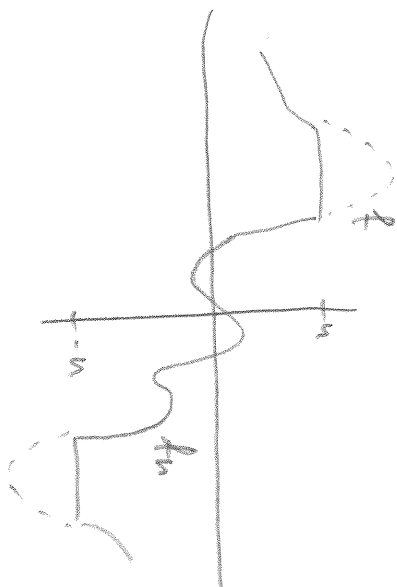
$g_n^{N(n)+1}, \dots, g_n^{N(n)+n}$ bzw. von: $\tilde{g}_n^j := g_n^{N(n)+j}$. Dann

$\forall j \leq n$ hier $< \varepsilon_n$ gilt $\forall j \geq n : |g_n^{N(n)+j} - f_n| < \frac{1}{n}$

Für diese n रहे man $g_n := \tilde{g}_n^1$. Damit hat

man $\|f_n - g_n\| < \frac{1}{n} \quad \forall n.$

Aufgabe 3 ii) Sei $f \in \mathcal{D}^p$ und $f_n := \max(\min(f, t), -n), n \in \mathbb{N}$.



Dann gilt $\square$ $f_n \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$) $\square$ f_n beschränkt $\square$ $\|f_n - f\|_p \leq \|f\|_p \mathcal{L}^1$. $\square$ es gilt (i) für $n(f_n)$, also gilt es $g_n \in C_b$ mit

$$\|g_n - f_n\|_p \leq \frac{1}{n} \quad (\text{wie in (i)})$$

$$\text{Also} \quad \|g_n - f\|_p \leq \|g_n - f_n\|_p + \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\square \square \square$
 $\xrightarrow{\text{Lebesgue}} 0$