Aufgabe 9 1 Beh $\mathring{B}$ offen 1 Bew Zu zeigen ist $\forall a \in \mathring{B}\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subset \mathring{B}$. Sei $a \in \mathring{B}$. Dann gibt es eine Umgebung U von a mit $a \in U \subset B$. Also gibt es ein $U_\varepsilon(a) \subset U$, da U offen ist. Also ist $a \in \mathring{B}$. Sei $a' \in U$ ein anderer Punkt aus U. Dann ist U auch Umgebung zu a', also auch $a' \in \mathring{B}$. Also $U \subset \mathring{B}$ $\square$

2 Beh $O \subset B$, O offen $\Rightarrow O \subset \mathring{B}$

2 Bew $a \in O \Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(a) \subset O \subset B \Rightarrow a$ ist innerer Punkt von $B \Rightarrow a \in \mathring{B}$ $\square$

<u>3 Beh</u> U offen $\Longrightarrow$ $U = \mathring{U}$ <u>3 Bew</u> „$\subset$" $U \subset U$

$\overset{2}{\Longrightarrow}$ $U \subset \mathring{U}$ „$\supset$" $a \in \mathring{U}$ $\Rightarrow$ a innere Punkt von U $\Rightarrow$ $a \in U$ $\square$

<u>4 Beh</u> $A \subset B$ $\Rightarrow$ $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ <u>4 Bew</u> $a \in \mathring{A}$ $\Longrightarrow$ $\exists$ Umgebung U von a mit $a \in U \subset A \overset{\text{Vor}}{\subset} B$ $\Rightarrow$ a innerer Punkt von B $\Longrightarrow$ $a \in \mathring{B}$ $\square$

<u>5 Beh</u> $\bar{A}$ abgeschlossen

<u>5 Bew</u> Zu zeigen: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{A}$, $x_n \to x$ $\Longrightarrow$ $x \in \bar{A}$.

Da $x_n \in \bar{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist x_n HP einer Folge aus A, also gilt $U_\varepsilon(x_n) \cap A \neq \emptyset$ f. jedes $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon = 1/n$ und $x_n' \overset{\boxed{1}}{\in} U_{1/n}(x_n) \cap A$. Dann gilt

$$d(x_n', x) \le \underbrace{d(x_n', x_n)}_{\overset{\boxed{1}}{\le} 1/n} + \underbrace{d(x_n, x)}_{\substack{\to 0 \\ \text{n. Voraussetzung}}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$ Also

$(x_n') \subset A$ und $x_n' \to x$, daher $x \in \overline{A}$ nach Dfn von $\overline{A}$ $\square$

<u>6. Beh</u> A abg $\Rightarrow$ $A = \overline{A}$ <u>6 Bew</u> „$\subset$" $a \in A$ ist Grenzwert der konstanten Folge (a), also $a \in \overline{A}$. „$\supset$" Sei $a \in \overline{A}$ HP einer Folge $a_n \to a$ mit $(a_n) \subset A$. Da A abg ist, ist $a \in A$. $\square$ <u>7. Beh</u> $A \supset B$, A abg $\Rightarrow$ $\overline{B} \subset A$

<u>7 Bew</u> $x \in \overline{B} \Rightarrow \exists\, (x_n) \subset B,\ x_n \to x \overset{B \subset A}{\Rightarrow} \exists\, (x_n) \subset A,\ x_n \to x$

$\overset{\text{Dfn.}}{\Longrightarrow} x \in \overline{A} \overset{6}{=} A$ $\square$

8 Beh $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ 8 Bew $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, (x_n) \subset A$

$x_n \to x \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} \exists\, (x_n) \subset B,\ x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{B}$ $\square$

9 Beh U offen $\Rightarrow U \subset \mathring{\overline{U}}$ 9 Bew $U \overset{\boxed{\text{Beweis von 6}}}{\subset} \overline{U} \overset{4}{\Rightarrow}$

$\mathring{U} \subset \mathring{\overline{U}} \overset{3}{\Rightarrow} U = \mathring{U} \subset \mathring{\overline{U}}$ $\square$ 10 Beh A abg $\Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset A$

10 Bew $\mathring{A} \overset{\boxed{\text{Beweis von 3}}}{\subset} A \overset{8}{\Rightarrow} \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \overset{6}{=} A$ $\square$ 11 Beh U offen

$\Rightarrow \overline{U} = \overline{\mathring{\overline{U}}}$ 11 Bew „$\subset$" 9 und 8 „$\supset$" $A := \overline{U}$ ist

nach 5 abgeschlossen $\overset{10}{\Rightarrow} \overline{\mathring{A}} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{U}}} \subset \overline{U}$ $\square$

12 Beh $\mathring{\overline{\mathring{A}}} = \mathring{A}$, A abg 12 Bew „$\subset$" $\overline{\mathring{A}} \overset{10}{\subset} A \overset{4}{\Rightarrow} \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \mathring{A}$

„$\supset$" $\mathring{A} =: U$ offen $\Rightarrow U \overset{9}{\subset} \mathring{\overline{U}} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ $\square$

Aufgabe 10

Zunächst gilt $\boxed{1}$ $\overline{A}^c = (A^c)^\circ$ $\boxed{2}$ $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$

$\boxed{3}$ Sei $A \subset X$. Dann $\boxed{3a}$

$$A \xrightarrow{-} \overline{A} \xrightarrow{c} \overline{A}^c \xrightarrow{-} \overline{\overline{A}^c} \xrightarrow{c} \overline{\overline{A}^c}^c = \overline{A}^{c c \circ} = \mathring{\overline{A}}$$

$$\xrightarrow{-} \overline{\mathring{\overline{A}}} \xrightarrow{c} \overline{\mathring{\overline{A}}}^c \xrightarrow{-} \overline{\overline{\mathring{\overline{A}}}^c}$$

$$\boxed{\overline{(\overline{A}^{c})^\circ}} \; \cancel{A} = \overline{\overline{\overline{A}^c}^\circ} = \overline{\overline{A}^{c\circ\circ}}$$

$$\overset{\|\, a)}{\overline{A}^{c\circ}} = \overline{A}^c =$$

liefert 7 ~~verschied~~ Möglichkeiten

$\underline{c} \overset{\boxed{1}}{=} \overset{\circ}{c}$ $\quad \overset{c}{\circ} \overset{\boxed{2}}{=} \overset{-}{c}$

$\boxed{3b}$ $$A^c \xrightarrow{-} \overline{A^c} \xrightarrow{c} \overline{A^c}^c = \mathring{A}^{cc} = \mathring{A} \xrightarrow{-} \overline{\mathring{A}} \xrightarrow{c} \overline{\mathring{A}}^c \xrightarrow{-} \overline{\overline{\mathring{A}}^c}$$

$$\xrightarrow{c} \overline{\overline{\mathring{A}}^c}^c \; \cancel{} = \mathring{A}^{\circ cc} = \overline{\mathring{A}}^\circ \xrightarrow{-} \overline{\overline{\mathring{A}}^\circ} \overset{a)}{=} \overline{\mathring{A}}$$

liefert 7 Möglichkeiten