Aufgabe 12

Beh $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\frac{ex}{k}\right)^k e^{-x}$ pktw. gegen $f \equiv 0$ aber nicht glm.

Bew Wegen $f_k(x) = \underbrace{\left(\frac{e}{k}\right)^k}_{} \frac{x^k}{e^x} \to 0$ f. $x \to \infty$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Aber es gilt

$f_k(k) = e^k e^{-k} = 1$, also $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_k(x)| \geq f_k(k) = 1$. □

Beh $g_k(x) := e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)$ glm gegen e^{-x}.

Bew Zunächst gilt $|g_k(x) - e^{-x}| = |e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - e^{-x}|$

$= e^{-x}\left|1 - \cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| \to 0$ f. $x \to \infty$.

Mit der Taylor-Formel erhält man ~~auf~~ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \cos x - T_1^0 \cos x \right| \leq \frac{1}{2!} \max_{\xi \in [0,x]} \overbrace{\left| \cos^{(2)}(\xi) \right|}^{} \cdot \max_{\xi \in [0,x]} |\xi|^2 \leq \frac{x^2}{2!}$$

Für ~~Alle~~ $x \in \mathbb{R}$ gilt also: $\left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$

Außerdem gilt:

$$\left| e^{-x} \left(\cos \frac{x}{k} - 1 \right) \right| = e^{-x} \underbrace{\left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right|}_{\in [0,2]} \leq 2 e^{-x} < \varepsilon \iff e^{-x} < \varepsilon/2$$

$$\iff -x < \ln \frac{\varepsilon}{2} \iff x > -\ln \varepsilon/2 = \ln 2/\varepsilon = \ln 2 - \ln \varepsilon =: M_\varepsilon$$

Also

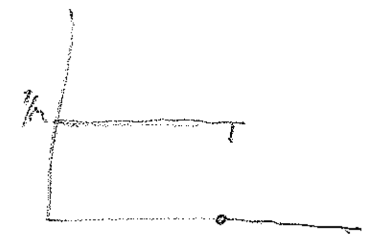
$$e^{-x} \left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right| = 1_{[0, M_\varepsilon]}(x) \, e^{-x} \left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right| + 1_{[M_\varepsilon, \infty)}(x) \, e^{-x} \left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right| \leq 1 \cdot \frac{x^2}{2k^2} + \varepsilon$$

$$\overset{x \leq M_\varepsilon}{\leq} \frac{M_\varepsilon^2}{2k^2} + \varepsilon \quad \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Damit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_k(x) - e^x| \leq \frac{M_\varepsilon^2}{2k^2} + \varepsilon \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dale

Ist $g_k \to g$ glm. $\square$

<u>Bsp</u>: $f_n(x) = \begin{cases} 1/n & : x \in [0,n] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$



$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies f_n \xrightarrow{\text{glm}} 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = 1 \not\to \int 0 = 0$ (f_n nicht stetig)

15) Es gilt $x^y = e^{y \ln x}$

$\underline{a > 0}$: $y \ln x \xrightarrow[\substack{y \to a \\ x \to 0}]{} -\infty \Rightarrow x^y \longrightarrow e^{-\infty} = 0$

$\underline{a < 0}$: $y \ln x \longrightarrow \infty \Rightarrow x^y \longrightarrow \infty$

$\underline{a = 0}$: $\boxed{1}$ $y_n := 1/n, \quad x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \ln x_n = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{1}{n}$

$= -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\boxed{2}$ $y_n := \frac{1}{\ln n}, \quad x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \ln x_n = -\frac{\ln n}{\ln n} = -1$

$\underline{\text{also}}$ $x^y \xrightarrow{(x,y) \to (0,a)} \begin{cases} 0 & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \\ / & : a = 0 \end{cases}$