$\boxed{\text{Aufgabe 34}}$ $u: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, und

DGL : $\partial_t^2 u(x,t) = a^2 \partial_x^2 u(x,t)$

a) <u>Beh</u> $u(x,t) := f(x+at) + g(x-at)$ ist LSG von DGL

$\forall f, g \in C^1(\mathbb{R})$ <u>Bew</u> $\boxed{1}$ Def $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) := x+at$.

Dann gilt $f(x+at) = f\circ\varphi(t)$, also $\partial_t f(x+at) = \partial_t (f\circ\varphi(t))$

$= \partial_t \varphi(t) \cdot f'(\varphi(t)) = a f'(x+at)$ und analog $\partial_t g(x+at) = -a g'(x-at)$.

$\boxed{2}$ Def $\psi(x) := x+at$. Dann $\partial_x f(x+at) = \partial_x (f\circ\psi(x)) = \partial_x\psi(x) \cdot f'($

$\psi(x)) = 1 \cdot f'(x+at)$. Genauso $\partial_x g(x-at) = g'(x+at)$

$\boxed{3}$ $\partial_t^2 u(x,t) = \partial_t \partial_t u(x,t) = \partial_t (\partial_t f(x+at) + \partial_t g(x-at)) \overset{\boxed{1}}{=} \partial_t (a f'(x+at)$

$\pm a g'(x-at)) = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$

$\boxed{4}$ $\partial_x^2 g_1(x,t) = \partial_x \left(\partial_x f(x+at) + \partial_x g(\cancel{x}-at)\right) \overset{\boxed{2}}{=} f''(x+at) + g''(x-at)$

a) $\boxed{1}$ Beh: Jede Lsg von DGL hat die Form $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$

Bew: Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "u"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[u, shift right, "\phi"'] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

mit $\phi(y,z) := (\phi_1(y,z), \phi_2(y,z)) := \left(\frac{1}{2}(y+z), \frac{1}{2a}(y-z)\right) = (x, \cancel{t})$ und

Umkehrfunktion $\psi(x,t) := (x+ta, x-ta) =: (y,z)$. Def $v(y,z) := u \circ \phi(y,z)$. Damit gilt

$\partial_z v(y,z) = \partial_z (u \circ \phi(y,z)) = \partial_z \phi(y,z) \cdot Du(\phi(y,z)) = (\phi_{1z}(y,z), (\phi_2)_z(y,z)) \cdot \operatorname{grad} u(\phi(y,z)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a}\right) \begin{pmatrix} \partial_x u(\phi(y,z)) \\ \partial_t u(\phi(y,z)) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \partial_x u(x,t)$

$- \frac{1}{2a} \partial_t u(x,t)$

Genauso erhalte $\partial_y\left(\partial_z v(y,z)\right) = \frac{1}{4}\partial_x^2 u(x,t) - \frac{1}{4a}\partial_t^2 u(x,t) \overset{\text{PDGL}}{=} 0$. Betrachtet man $\partial_z v(y,z) =: \tilde{v}(y)$, so ist also

$\tilde{v}(y)$ nach MWS konstant, also $\tilde{v}(y) = \tilde{v}(0)$, also

$\partial_z v(y,z) = \tilde{v}(0) = \partial_z(v(0,z))$. Also $0 = \partial_z\big(\underbrace{v(y,z) - v(0,z)}_{=\hat{v}(z)}\big)$

$=: \partial_z(\hat{v}(z))$. Wieder nach MWS ist $\hat{v}(z) = \hat{v}(0) =$

$v(y,0) - v(0,0)$, also insgesamt: $v(y,z) - v(0,z) = \hat{v}(z) =$

$\hat{v}(0) = v(y,0) - v(0,0) \implies v(y,z) = v(y,0) + v(0,z) - v(0,0)$

$\implies u(x,t) = v(\psi_1(x,t), \psi_2(x,t)) = v(x+ta, x-ta) = v(x+ta, 0)$

$+ v(0, x-ta) - 2\cdot\frac{1}{2}v(0,0) =: f(x+ta) + g(x-ta)$ mit

$f(x+ta) := v(x+ta) - \frac{1}{2}v(0,0)$, $g(x-ta) := v(x-ta) - \frac{1}{2}v(0,0)$ $\square$

$\boxed{2}$ Sei $u_0, u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ und $u(x,t)$ eine Lsg von DGL

mit (1) $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,0) = \partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = u_1(x)$

Beh: u ist eindeutig. Bew: Sei u eine Lsg. wie in $\boxed{1}$ | die (1) genügt. Es gilt also

$u_0(x) = f(x) + g(x)$ und $u_1(x) = a\partial_t u(x,t)\big|_{t=0} = (af'(x+at)$

$- ag'(x+at))\big|_{t=0} = af'(x) - ag'(x)$. Es gilt

$$\int_0^x u_1(h)\,dh = a\int_0^x f'(h) - g'(h)\,dh = a\big(f^*(x) - g^*(x) - (f^*(0) - g^*(0))\big) \Rightarrow$$

$$f(x) - g(x) = f(0) - g(0) + \frac{1}{a}\int_0^x u_1(h)\,dh, \Rightarrow f(x) = u_0(x) - f(x)$$

$$+ f(0) - g(0) + \frac{1}{a}\int_0^x u_1(h)\,dh \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(h)\,dh$$

oBdA $f(0) = g(0) = \frac{1}{2}u_0(0)$
u ändert sich in Bel. $\boxed{1}$ nicht

Genauso erhalte $g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(h)\,dh$ $\square$

$\boxed{3}$ <u>Beh</u> Die DGL hat eine Lsg der Form wie in Bew

$\boxed{1}$ <u>Bew</u>: Setze f und g wie in $\boxed{2}$ ~~[illegible]~~ für $u_0, u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ mit $u_1(0)=0$ beliebig. Sei $u(x,t) := f(x+at) + g(x-at)$. Dann ist u nach Teil a) eine Lösung und es gilt (1) denn:

$$u(x,0) = f(x)+g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2} u_0(x) \text{ und } \partial_t u(x,t)\Big|_{t=0}$$

$$= f'(x+at)\Big|_{t=0} + g'(x-at)\Big|_{t=0} = \left(u_1 \tfrac{1}{a}(x) + u_1(0)\right) = u_1(x)$$

$$f'(x+at) = \partial_t \frac{1}{2} u_0(x+at)\Big|_{t=0} + \partial_t \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} u_1(h)\,dh\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} a\, u_0'(x+at)\Big|_{t=0} + \frac{a}{2a}\big(u_1(x+at) - u_1(0)\big)\Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{1}{2} a\, u_0'(x)}_{} + \frac{1}{2}\big(u_1(x) - u_1(0)\big)$$

$$g'(x-at)\Big|_{t=0} = \boxed{-\frac{1}{2} a\, u_0'(x)} - \frac{1}{2a} \partial_t \Big(\underbrace{\int_0^{x-at} u_1(h)\,dh}_{=G(x-at)}\Big)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} a\, u_0'(x) - \frac{1}{2a}\, (-a) \big(u_1(x-at) - u_1(0)\big)\Big|_{t=0}$$

$$= -\frac{1}{2} a\, u_0'(x) + \frac{1}{2}\big(u_1(x) - u_1(0)\big)$$