Ana2-3.jpg

$\boxed{\text{Aufgabe 41}}$ $\boxed{1}$ Für $a \in V$ beachten wir $f'(a)\cdot v = \partial_v f(a)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(a+hv) - f(a)\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\langle a+hv, A(a+hv)\rangle}{\langle a+hv, a+hv\rangle} - \frac{\langle a, Aa\rangle}{\langle a,a\rangle}\right)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\langle a+hv, A(a+hv)\rangle\langle a,a\rangle - \langle a+hv, a+hv\rangle\langle a, Aa\rangle}{\langle a+hv, a+hv\rangle\langle a,a\rangle}\right)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\left(\cancel{\langle a, Aa\rangle} + h\langle a, \boxed{Av}\rangle + h\langle v, Aa\rangle + h^2\langle v,v\rangle\right)\langle a,a\rangle - \left(\cancel{\langle a,a\rangle} + 2h\langle a,v\rangle + h^2\langle v,v\rangle\right)\langle a, Aa\rangle}{\left(\langle a,a\rangle + 2h\langle v,a\rangle + h^2\langle v,v\rangle\right)\langle a,a\rangle}\right)$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{\left(\langle a, \boxed{Av}\rangle + \langle v, Aa\rangle + h\langle v,v\rangle\right)\langle a,a\rangle - \left(2\langle a,v\rangle + h\langle v,v\rangle\right)\langle a, Aa\rangle}{\left(\langle a,a\rangle + 2h\langle v,a\rangle + h^2\langle v,v\rangle\right)\langle a,a\rangle}\right)$$

$$= \frac{\left(\langle a, \boxed{Av}\rangle + \langle v, Aa\rangle\right)\langle a,a\rangle - 2\langle a,v\rangle\langle a, Aa\rangle}{\langle a,a\rangle^2} = 2\,\frac{\langle v, Aa\rangle\langle a,a\rangle - \langle a, Aa\rangle\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle^2}$$

$\boxed{2}$ $x \in Y$ stationär $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: f'(x)v = 0$

$\boxed{1}$

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \langle v, Ax\rangle\langle x, x\rangle - \langle x, Ax\rangle\langle v, x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \langle v, \langle x,x\rangle Ax\rangle - \langle v, \langle x, Ax\rangle x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \langle v, \langle x,x\rangle Ax - \langle x, Ax\rangle x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow$ $\langle x,x\rangle Ax - \langle x, Ax\rangle x = 0$ $\Leftrightarrow$ $Ax = \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle} x$

$\boxed{\langle y,x\rangle = 0 \overset{SP}{\Rightarrow} x=y=0}$

$\Rightarrow$ x ist EV zu EW $\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$

Falls $Ax = \lambda x$, folgt durch einsetzen: $\lambda x = \frac{\langle x, \lambda x\rangle}{\langle x,x\rangle} x$

$\Leftrightarrow$ $\lambda x = \lambda x$

$\square$

Bsp $\quad f(x) = \dfrac{\langle x | Ax \rangle}{\langle x | x \rangle} \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$= \frac{\langle x , \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} x \rangle}{x^2 + y^2} = \frac{\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \rangle}{x^2 + y^2} = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\overset{b=0}{=} \frac{ax^2 + cy^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\|(x,y)\|^2} \, ax^2 + cy^2$$

$\boxed{\text{Aufgabe 42}}$ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := \int_1^a \underbrace{e^{txy}/t}_{f(x,y,t)} \, dt$

F ist $\boxed{\text{nach Folg 10}}$ stetig diffbar, falls $\partial_x f(x,y,t)$ und $\partial_y f(x,y,t)$ stetig sind. Also: $\partial_x f(x,y,t) = y\, e^{txy}$, $\partial_y f = x e^{txy}$ sind stetig. Also gilt mit Folg 10: $F_x(x,y) =$

$$\int_1^a \partial_x f(x,y,t)\, dt = \int_1^a y e^{txy}\, dt, \quad F_y(x,y) = \int_1^a x e^{txy}\, dt.$$

$$\int_1^a y e^{txy}\, dt = \begin{cases} y \frac{1}{xy} e^{txy} \Big|_1^a = \frac{1}{x}\left(e^{axy} - e^{xy}\right) & : \text{falls } x \neq 0 \\ \int_1^a y \, dt = (a-1)y & : \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_1^a x e^{txy}\, dt = \begin{cases} \dfrac{e^{axy} - e^{xy}}{y} = \frac{1}{y}\left(e^{xy}\left(e^{(a-1)xy} - 1\right)\right) & : y \neq 0 \\ (a-1)x & : y = 0 \end{cases}$$

Es folgt $\underline{0} = (F_x(x,y), F_y(x,y)) \Leftrightarrow x=y=0 \lor (a-1)xy = 0$

$\overset{a>1}{\underset{\text{Vor.}}{\Longleftrightarrow}} \quad x = y = 0$

$\boxed{\text{Aufgabe 43}}$ $\boxed{a}$ $\boxed{1}$ $f(x,y) = (xe^y, ye^x) \Rightarrow Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det Jf(x,y) = e^{x+y} - yx e^{x+y} = e^{x+y}(1 - yx)$

$\boxed{2}$ f lokal in (x,y) invertierbar (Satz 42), falls $f'(x,y)$ invertierbar,

also $yx \neq 1$.

b) $\boxed{1}$ $f(x,y) = (u,0) \Rightarrow xe^y = u,\ ye^x = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = u$

$\Rightarrow f(u,0) = (u,0)$ $\boxed{2}$ $f(x,y) = (0,v) \Rightarrow 0 = xe^y,\ v = ye^x$

$\Rightarrow x = 0,\ v = y \Rightarrow f(0,v) = (0,v)$

Ist $g \circ f = id$, also g Umkehrabbildung zu f, dann gilt nach (Satz 42) Seite 64 oben: $g'(u,0) = f'(g(u,0))^{-1}$

$$= Jf(g(u,0))^{-1} \overset{\boxed{1}}{=} Jf(f^{-1}(u,0))^{-1} = Jf(u,0)^{-1} \overset{\boxed{a)1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & e^u \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{e^u} \begin{pmatrix} e^u & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{u}{e^u} \\ 0 & 1/e^u \end{pmatrix}.$$ Genauso gilt

$$g'(0,v) = f'(g(0,v))^{-1} \overset{\boxed{2}}{=} f'(0,v)^{-1} = Jf(0,v)^{-1} \overset{\boxed{a)1}}{=} \begin{pmatrix} e^v & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{e^v} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & e^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-v} & 0 \\ -ve^{-v} & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 44a}}$ Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, also $f: V \to V$ linear, dann gilt $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. $\underline{\text{Def}^n}$ $\|f\| := \sup\limits_{\|x\|_V = 1} \|Ax\|_V$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$.

$\boxed{1}$ Mit der $\triangle$ gilt: für alle $x \in V$

$$\frac{\|f(x)\|_V}{\|x\|_V} = \left\| \frac{1}{\|x\|_V} f(x) \right\|_V = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right) \right\|_V \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \|f\|,$$

also $\|f(x)\|_V \leq \|f\| \, \|x\| \quad \forall x \in V$. Also

$$\|f^j\| = \sup_{\|x\|=1} \|f^j(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|f(f^{j-1}(x))\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|f\| \, \|f^{j-1}(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|f\|^j \, \|x\| = \|f\|^j.$$

$\boxed{2}$ Man bekommt: $\| \underbrace{f(x)}_{\in End(V)} \| = \| \sum_{j=0}^{\infty} x^j \| = \| \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} x^j \|$

$\underset{\|\cdot\| \text{ stetig}}{=} \lim_{k \to \infty} \| \sum_{j=0}^{k} x^j \| \underset{\triangle \text{ in } End(V)}{\le} \lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} \|x^j\| \overset{\boxed{2}}{\le} \underbrace{\lim_{k \to \infty} \sum_{j=0}^{k} \|x\|^j}_{\in \mathbb{R}}$

$\underset{\text{geom R}}{\overset{\|x\|<1}{=}} \frac{1}{1 - \|x\|}$. Das zeigt die letzte Aussage und dass

$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ absolut konvergent ist. Man bekommt:

$\| \sum_{j=N}^{M} x^j \| \le \sum_{j=N}^{M} \|x^j\| \longrightarrow 0$ f. alle $M \ge N \ge N_0 \in \mathbb{N}$ groß

genug. Also ist $a_M := \sum_{j=0}^{M} x^j$ konvergent nach dem Cauchy-

Kriterium in dem normierten Raum $End(V)$.

$\boxed{3}$ $$(id - x) f(x) = (id - x) \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} x^j}_{\in \operatorname{End}(V)} \underset{\text{konvgt}}{=} \lim_{N\to\infty} (id - x) \sum_{j=0}^{N} x^j$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} x^j - \sum_{j=0}^{N} x^{j+1} = \lim_{N\to\infty} x^0 = id \in \operatorname{End}(V).$$

Genauso $f(x)(id - x) = id$. Also folgt $(f(x))^{-1} = id - x$ $\in \operatorname{End}(V)$

b) Es sei $a \in \operatorname{Hom}(V,W)$ inv.-bar und $y \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Sei $x := id - a^{-1} y \in \operatorname{End}(V)$. Denn $\|x\| = \| a^{-1}(a - y) \|$ $\underset{\text{analog}}{\overset{\boxed{1}}{\leq}} \|a^{-1}\| \, \|a - y\| \overset{\text{Vor.}}{<} \|a^{-1}\| \, \|a^{-1}\|^{-1} = 1$. Also gilt nach a) dass $id - x$ inv.-bar ist, also $y = a(id - x)$

$\Rightarrow y^{-1} = (id - x)^{-1} a^{-1} = f(x) a^{-1}$ $\square$

c) Betrachte die folgende Funktionen für ein invertierbares Elmt $a \in End(V)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
End(V) & \xrightarrow{g} & End(V) & \xrightarrow{f} & End(V) & \xrightarrow{T} & End(V) \\
y & \overset{g}{\longmapsto} & id - a^{-1}y & \longmapsto & f(id - a^{-1}y) & \longmapsto & z \circ a^{-1} \\
 & & \| & & \| & & \\
a(id - x) & \overset{g^{-1}}{\longleftarrow\!\!\!\shortmid} & : x & & f(x) =: z & &
\end{array}$$

(Grund: siehe $\boxed{4}$)

$\boxed{1}$ Beh: $g'(b)(v) = -a^{-1}v$ Bew: Sei $\ell_b(v) := g'(b)(v) = -a^{-1}v$,

dann gilt $g(b+v) - g(b) - \ell_b(v) = \cancel{id} - a^{-1}(b+v) - \cancel{id} + a^{-1}b + a^{-1}v = 0$

[illegible] $= r(v)$, also $\frac{r(v)}{\|v\|} = 0$. $\square$

$\boxed{2}$ Beh $T'(b)(v) = va^{-1}$ Bew $T(b+v) - T(b) - va^{-1} = (b+v)a^{-1} - ba^{-1} - va^{-1}$

$= ba^{-1} + va^{-1} - ba^{-1} - va^{-1} = 0$ $\square$

$\boxed{3}$ Bch: $H_a := T \circ f \circ g$ ist db. im a (also $H_a'(a)$ existiert) Bew

$$H_a'(b)(v) = (Tfg)'(b)(v) \overset{KR}{=} T'(fg(b))\big((fg)'(b)(v)\big) = T'(f(\mathrm{id} - a^{-}b))\big(f'(g(b))(g'(b)(v)\big)$$

$$= f'(g(b))(g'(b)(v))\, a^{-} = f'(\mathrm{id} - a^{-}b)(-a^{-}v)\, a^{-}$$

$$\overset{b=a}{=} \underbrace{f'(0)}_{\text{existiert}}(-a^{-}v)\, a^{-} \overset{\boxed{2,5}}{=} -a^{-}va^{-}$$

$\boxed{4}$ Also $H_a'(y) = f(\mathrm{id} - a^{-}y)a^{-} = y^{-1} \Longleftrightarrow f(\mathrm{id} - a^{-}y)a^{-}y = \mathrm{id}$ $\overset{a)}{\Longleftrightarrow} \|\mathrm{id} - a^{-}y\| < 1$

$\boxed{5}$ Sei $x_0 \in \mathrm{End}(V)$ mit $\|x_0\| < 1$. Dann ist $\mathrm{id} - x_0$ nach a) invertierbar mit $f(x_0) \overset{a)}{=} (\mathrm{id} - x_0)^{-1} \overset{\boxed{4}}{=} H_{\mathrm{id}-x_0}(\mathrm{id} - x_0)$. Sei $\tilde{T}(x_0) := \mathrm{id} - x_0$. Dann $f(x_0) = H_{\mathrm{id}-x_0}(\tilde{T}(x_0))$, also $f'(x_0)(v) = H'_{\mathrm{id}-x_0}(\tilde{T}(x_0))(\tilde{T}'(x_0)(v)) = \underbrace{H'_{\mathrm{id}-x_0}(\mathrm{id} - x_0)}_{\text{existiert nach } \boxed{3}}(\tilde{T}'(x_0)(v))$ □

$\boxed{2,5}$ Bch $f'(0)(v) = v$ Bew: Setze $l_0(v) := v$. Dann $f(0+v) - f(0) - l_0(v)$
$= \sum_0 v^i - \mathrm{id} - v = \sum_2 v^i = v^2 f(v) \Rightarrow \frac{\|v^2 f(v)\|}{\|v\|} = \|v\| \cdot \|f(v)\| \leq \frac{\|v\|}{1-\|v\|} \xrightarrow{v \to 0} 0$ □

$\boxed{6}$ <u>Beh</u>: $\forall v \in \mathrm{End}(V)$: $\quad f'(x)(v) = f(x)\, v\, f(x)$

<u>Bew</u>: Es gilt ja $\quad \underbrace{\overbrace{(id - x)}^{F}}_{\in \mathrm{End}(V)} \circ \underbrace{\overbrace{f(x)}^{G}}_{\in \mathrm{End}(V)} = \underbrace{id_V}_{\in \mathrm{End}(V)}$. Daher

$$(F \circ G)'(v) = F'(v) \circ G(v) + F(v) \circ G'(v)$$

$$= -v\, f(x) + (id - x)\, f'(x)(v) \quad = 0$$

also: $(id - x)\, f'(x)(v) = v\, f(x) \quad \overset{f(x)\circ\cdot}{\Longrightarrow} \quad f'(x)(v) = f(x)\, v\, f(x)$ $\square$