$\boxed{A3}$

a) R: $a \sim a \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{Q}$ $\quad S$: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q} \Rightarrow -(a-b) = b - a \in \mathbb{Q}$ $\quad T$: $a - b \in \mathbb{Q} \wedge b - c \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - c = \underbrace{a-b}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{b-c}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$

b) $[a] = \{ b \in \mathbb{R} \mid b \sim a \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q} \}$

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}: \; n \leq a \leq n+1 \Rightarrow 0 \leq a - n \leq 1$

$\Rightarrow [a-n] = [a]$, $a - n \in \mathbb{R}$, $a - n \in [0,1]$

c) i) $[0,1] \subseteq V$:

Sei $x \in [0,1]$. Ist x bereits ausgewählter Vertreter ~~von~~ seiner Klasse $[x] = \{x + \mathbb{Q}\}$, dann ist $x = x + 0$. Ist r der Vertreter von $\{x+\mathbb{Q}\}$ mit $[r] = \{x + \mathbb{Q}\} = [x]$, so ist $x \sim r$, also $x = r + q$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

c) ii) „$\subseteq$" $x \in V \Rightarrow x = a + b, \quad a \in C_{[0,1]}, \; b \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

„$\supseteq$" ✓

Disjunkt: Beh $q_1 \neq q_2 \Rightarrow V_1 := \{C_{[0,1]} + q_1\} \neq \{C_{[0,1]} + q_2\} =: V_2$

Bew: $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \Rightarrow q_1 + x_1 = q_2 + x_2$ für $x_1, x_2 \in C_{[0,1]}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 \sim x_2 \xRightarrow{x_1, x_2 \in C_{[0,1]}} x_1 = x_2$

genau ein Vertreter aus $[0,1]$

$\Rightarrow q_1 = q_2$ ↯

d) Dann $[0,1] \subseteq V \subseteq [-1,2] \xRightarrow{\sigma\text{-Add.}} 1 \leq \lambda(V) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(C_{[0,1]} + q)$

$\stackrel{T}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(C_{[0,1]}) \leq 3$ ~~...~~. Wid. denn sowohl

$\lambda(C_{[0,1]}) = 0$ als auch $\lambda(C_{[0,1]}) > 0$ nicht möglich.