$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W-Raum, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ZV

$F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad F_X(x) := P(\{X \leq x\}) = P_X((-\infty, x])$

<u>Beh</u> $F_X$ monoton $\nearrow$ <u>Bew</u> $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$

$\Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ <u>Beh</u> $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ <u>Bew</u>

Für $x \nearrow \infty$ gilt $(-\infty, x] \nearrow (-\infty, \infty)$, also $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x)$

$= \lim\limits_{x \nearrow \infty} P_X((-\infty, x]) = P_X((-\infty, \infty)) = \underline{1}$

<u>Beh</u> $\lim\limits_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = 0$ <u>Bew</u> $x \downarrow -\infty \Rightarrow (-\infty, x] \downarrow \emptyset$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \downarrow -\infty} P_X((-\infty, x]) = P(\emptyset) = 0$

<u>Beh</u> $\lim\limits_{x_k \downarrow x} F_X(x_k) = F_X(x)$ <u>Bew</u> $x_k \downarrow x \Rightarrow (-\infty, x_k] \downarrow (-\infty, x]$

$\Rightarrow F_X(x_k) \downarrow F_X(x)$

Zur Rechtsstetigkeit

$\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, \underbrace{1 - \tfrac{1}{n}}_{a_n :=}] \subsetneq [0,1]$ also: $[0, a_n] \not\to [0,1]$

$a_n \nearrow 1$

$[\,1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - 1/n]$ denn $\nexists\, n \in \mathbb{N}\,]$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1 + \tfrac{1}{n}] = [0,1]$ $[\,$ „$\supseteq$" ✓ „$\subseteq$" $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \forall n: x \in [0, 1 + \tfrac{1}{n}]$

$\Rightarrow x \in [0,1]\,]$

$\boxed{3b}$ $F_n(x) := P(X_n \leq x)$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$

$F^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{j=1}^{n} F_j(x_j)$ $F^{(n)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Beh $F^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow[x_n \nearrow \infty]{} F^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})$

<u>Bew</u> $\boxed{F^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_j(x_j) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \le x_j)} =$

Wegen: $x_n \nearrow \infty \Rightarrow \{X_n \le x_n\} \nearrow \Omega \Rightarrow P(X_n \le x_n) \nearrow 1$

folgt: $= P(X_1 \le x_1) \cdots P(X_{n-1} \le x_{n-1}) \cdot \underbrace{P(X_n \le x_n)}_{\to 1}$

$\xrightarrow[x_n \to \infty]{} \prod_{j=1}^{n-1} F(X_j \le x_j) = F^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})$

**Aufgabe 4** $\boxed{1}$ $\Omega_e := \{ \underline{\omega} := (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1,2 \}$

$\tilde{\mathcal{F}}_e := \mathrm{Pot}(\Omega_e)$, $P_e(\{0,0\}) := (1-p_1)(1-p_2)$, $P_e(\{1,0\}) = \ldots$

$\boxed{2}$ $\Omega = \Omega_e^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{E} := \{ B \subset \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \exists B_0 \in \mathrm{Pot}(\Omega_e^n) : B =$

$B_0 \times \Omega_e \times \cdots \}$, $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{E})$, $\tilde{P}(B) := \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\})$,

$\tilde{P}(\{\omega\}) := \prod_{i=1}^{n} P_e(\underline{\omega}_i)$ wo $(\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_n) \in \mathrm{Pot}(\Omega_e^n)$ und $\omega \in B \subset \Omega$

Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist gibt es ein eindeutiges Maß $P$ auf $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.

mit $P|_{\mathcal{E}} = \tilde{P}$ $\boxed{3}$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & \overline{\mathbb{R}} \arrow[dl, "PT^{-1}"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$$T(\omega) := \begin{cases} N & : \exists N \in \mathbb{N} : \omega_N = (1,1) \text{ und } \omega_i \neq (1,1) \text{ f. alle } i < N \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

__Beh__ $T$ ist $\mathcal{B}$-$\mathcal{F}$-mb. __Bew__: Es gibt

$$T^{-1}(n) = \{ \omega \in \Omega \mid \underline{\omega}_n = (1,1),\ \underline{\omega}_i \neq (1,1)\ \forall i < n \} \in \mathcal{C}$$

$$T^{-1}(\infty) = \{ \omega \in \Omega \mid \underline{\omega}_i \in \Omega_e \setminus \{(1,1)\} \} = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{ \omega \in \Omega \mid \boxed{\exists n \in \mathbb{N}}\ \underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_n \notin \{(1,1)\} \}}_{\in\, \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})}}_{\in\, \sigma(\mathcal{C}) = \hat{\mathfrak{F}}}$$

<u>Beh</u> $PT^{-1}(\mathbb{R}) = 1$ <u>Bew</u> $PT^{-1}(\mathbb{R}) = PT^{-1}(\mathbb{N})$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} PT^{-1}(n) \overset{\text{Def } P}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - p_1 p_2)^{n-1} p_1 p_2 = \frac{1}{1 - (1 - p_1 p_2)} p_1 p_2 = 1$$

<u>Beh</u> $PT^{-1}(\infty) = 0$ <u>Bew</u> $PT^{-1}(\mathbb{N} \cup \infty) = PT^{-1}(\mathbb{N}) + PT^{-1}(\infty) = 1 + PT^{-1}(\infty) \implies PT^{-1}(\infty) = 0$ (denn $PT^{-1}$ ist W-Maß)

<u>Beh</u> $a_n = (1 - p_1 p_2)^{n-1} p_1 p_2$ <u>Bew</u> $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow PT^{-1}(A)$

$$= PT^{-1}(A \cap \mathbb{N}) = \sum_{n \in A} PT^{-1}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - p_1 p_2)^{n-1} p_1 p_2 \, \mathbb{1}_{\{n\}}(A)$$

<u>Also</u> $a_n = PT^{-1}(n) = P(T = n)$

$\boxed{7}$ $\int_\Omega T \, dP = \int_\Omega \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}} \circ T \, dP = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{R}}} \, d PT^{-}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ PT^{-1}(\infty) = 0}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \, d PT = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \, d \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(n) \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(T = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1 - p_1 p_2)^{n-1} p_1 p_2 = p_1 p_2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \Big|_{x = 1 - p_1 p_2}$$

$$= p_1 p_2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \Big|_{x = 1 - p_1 p_2} = p_1 p_2 \frac{1}{(1-x)^2} \Big/_{1 - p_1 p_2}$$

$$= \frac{1}{p_1 p_2} \mathrel{\hat{=}} \text{Erwartungswert von } T$$