

Aufgabe 4 i) $\exists (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \in \mathbb{Z}_n, \dots$
 $(2,3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \in \mathbb{Z}_n$

aber $(0,1) \cup (2,3) \times \mathbb{R} \times \dots \notin \mathbb{Z}_n$

$\exists$ genau $(0,1)^c \times \emptyset \times \emptyset \times \dots \notin \mathbb{Z}_n$

$\exists$ aber $\mathbb{Z}_n$ ist schwach stabil, da $I \cap J$ Intervall ist, falls

I und J Intervalle sind.

ii) $\pi^{(n)}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, also ist $\pi^{(n-1)}(A) \neq A \in \mathcal{B}^N$ nicht
 definiert

iii) $\mathcal{B}^N = \sigma(\text{alle } \pi_n: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind } \mathcal{B}^N \text{-ms})$

$$= \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(B)\right) = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\pi_n^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}\}\right)$$

wobei: $\pi_n^{-1}(A) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times A \times \mathbb{R} \times \dots$
 $\frac{1}{n-1} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$\text{also } \mathcal{P} := \{ \mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{R}}_{n\text{-te-Pos}} \times \mathbb{R} \times \dots \mid A \in \mathcal{B}^n, n \in \mathbb{N} \}$$

$$\text{ist EGS, wo dass 27 ist } \nabla(Z) = \nabla(\emptyset)$$

$$\text{"e" } Z \subset \nabla(\emptyset) : A \in Z \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : A \in Z_n \Rightarrow$$

$$A = I_n \times \dots \times I_n \times \mathbb{R} \times \dots = (I_n \times \mathbb{R} \dots) \cap (\mathbb{R} \times I_2 \dots)$$

$$\dots \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times I_n \times \mathbb{R}) \in \nabla(\emptyset)$$

$$\text{">" } \text{Dom}(\nabla(\{ (a,b) \mid a < b \in \mathbb{R} \})) = \text{null } \mathcal{B}^n \text{ ist gilt } \nabla : C \in \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow C \in \mathbb{R} \times \dots \times \nabla(\underbrace{\{ (a,b) \mid a < b \in \mathbb{R} \}}_{n\text{-te-Pos}}) \times \mathbb{R} \times \dots$$

$$\Rightarrow C \in Z_n, \text{ da } (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \text{ Intervall ist.}$$

$$\text{iv) } Z \text{ ist n-stabil}$$

16 a) Beh $X \mathcal{F}\text{-}\mathcal{P}(F)\text{-ms} \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N} : X^{-n}(x_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$

Bew $X \mathcal{F}\text{-}\mathcal{P}(F)\text{-ms} \Leftrightarrow X^{-n}(A) \in \tilde{\mathcal{F}} \quad \forall A \in \mathcal{P}(F)$

$\Leftarrow \forall A \subset F : X^{-n}(A) \in \tilde{\mathcal{F}}$

" $\Rightarrow$ Wähle $A = \{x_j\} \in \mathcal{F}$ Sei $A \in \tilde{F}$. Dann $A =$

$\{x_i : \underbrace{i \in I}_{\text{Index}} \underbrace{X^{-n}(x_i)}_{\in \tilde{\mathcal{F}}}\}$

15ii $\square$ Sei $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{C})$ mit $\mathcal{C} := \{F_1 \times \dots \times F_n \times F$

$\times F \times \dots \mid n \in \mathbb{N}, F_i \in \mathcal{F}\}$. $\square$ X stoch. Prozeß mit

Werten in $F : \Omega \Rightarrow X = (X_1, X_2, \dots)$

auf $(\Omega, \mathcal{G})$

$X_n : \Omega \rightarrow F$ m.b.w.

$\square$ Wegen $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} (\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j^{-1}(P(\mathcal{G}_j)))$

(wie im 1a) ist $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (F^\mathbb{N}, \mathcal{F}_\infty)$ $\mathcal{F}$ - $\mathcal{F}_\infty$

meßbar und liefert den W -Raum $(\hat{P}, F^\mathbb{N}, \mathcal{F}_\infty)$

via $\hat{P}_x(B) := P(X \in B)$, $B \in \mathcal{F}_\infty$.

[3] Da $\mathcal{C}$ n -stabile Erzeuger von $\mathcal{F}_\infty$ ist, gilt: X, y

haben die gleiche Vt. $\Leftrightarrow \hat{P}_x(B) = \hat{P}_y(B) \quad \forall B \in \mathcal{C}$

[4] ~~Beweis~~ Beweis des Boh: "A" Sei $C \in \mathcal{C}$. Dann $\exists n \in \mathbb{N} : \{X \in C\}$

$$= \{ \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \in F_1 \} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \in F_i\} = \bigcup_{(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n} \{X_1 = f_1\} \cap \dots \cap \{X_n = f_n\},$$

Zu $\otimes$: "C" $\omega \in \bigcap_{i=1}^n \{X_i \in F_i\} \Rightarrow \underbrace{X_1(\omega) \in F_1, \dots, X_n(\omega) \in F_n}_{=: f_1, \dots, f_n}$

" $\supset$ " $\omega \in \bigcup_{(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n} \{X_1 = f_1\} \cap \dots \cap \{X_n = f_n\} \Rightarrow \exists (f_1, \dots, f_n) : \omega \in \bigcap_{i=1}^n \{X_i = f_i\}$

$$\underbrace{\bigcup_{(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n} \{X_1 = f_1\} \cap \dots \cap \{X_n = f_n\}}_{C \cap \{X_i \in F_i\}}$$

Dann folgt

$$P(X \in C) = \sum_{\substack{(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n}} P(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = f_i\}) \stackrel{\text{v-add.}}{=} \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n} P(\bigcap_{i=1}^n \{Y_i = f_i\})$$

$$= P(Y \in C) = \hat{P}_y(C)$$

$$\Rightarrow P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n) = P(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = t_i\})$$

$$= \frac{P(X \in \{t_1\} \times \dots \times \{t_n\} \times F_{t_n}^n)}{|\mathcal{C}|} = \frac{P(Y \in \mathcal{C})}{|\mathcal{C}|}$$

$$= P(y_1 = t_1, \dots, y_n = t_n)$$

Aufgabe 2

a) $\Omega = \chi_{\{0,1\}^n}$, $\text{Pot}(\Omega) = \mathcal{F}$, $P(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{-n}$, $(4-p)^{n-\sum \omega_i}$

b) $K_n : \{0,1\}^n \times \mathcal{P}(\{0,1\}) \rightarrow [0,1]$

$$(\underline{w}, A) \mapsto p \cdot \chi_{\{0\}}(A) + (1-p) \cdot \chi_{\{1\}}(A)$$

$K_n(\underline{w}, \cdot) : \mathcal{P}(\{0,1\}) \rightarrow [0,1]$

ist als Summe von Dirac-Maßen in $\mathcal{P}(\mathcal{P})$

$K_n(\cdot, A) : \{0,1\}^n \rightarrow [0,1]$

ist $\text{Pot}(\{0,1\}^n) - \mathcal{B}$ - messbar

$$(K_n(\cdot, A))^n(B) = \{0,1\}^n \quad \forall B \in \mathcal{B}([0,1])$$

c) Def: $Q^{(n)} := \mu$ Maß auf $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), \mu)$ $\mu(1) = p, \mu(0) = 1-p$
eingefroren Maß

$$Q^{(n,n)} = Q^{(n)} \otimes K_n \text{ U-Maße auf } \text{Pot}(\{0,1\}^n) \otimes \mathcal{P}(\{0,1\}) \ni A:$$

$$Q^{(n,n)}(A) = \int Q^{(n)} d\nu \quad K_n(\underline{w}, A_{\underline{w}}) =$$

$$A_{\underline{w}} = \{x \in \{0,1\}^n \mid (\underline{w}, x) \in A\} \quad [0,1]$$

Mit Satz 2.27 1-T folgt die Behauptung

Beispiel $n=1$: $Q^{(1)}(A) = \int Q^{(1)} d\omega \quad K_1(\omega, A_\omega) \quad A \in \mathcal{I}(\mathcal{G}_1)$

$\stackrel{Q^{(1)} = \mu}{=} \int Q^{(1)} d\omega_1 \quad K_1(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad \mathcal{I}(\mathcal{G}_1)$

$Q^{(1)} = \mu = p \varepsilon_1 + (1-p) \varepsilon_0$

$\stackrel{Q^{(1)} = \mu}{=} \int K_1(\omega_1, A_{\omega_1}) d(p \varepsilon_1 + (1-p) \varepsilon_0)$

$= \int K_1(\omega_1, A_{\omega_1}) d p \varepsilon_1 + \int K_1(\omega_1, A_{\omega_1}) d (1-p) \varepsilon_0$
 $\omega_1 \in \{\omega_1\}$

$= p \cdot K_1(1, A_1) + (1-p) K_1(0, A_0) =$

Bsp: $A = \{(1, 0_2)\}$

$A_1 = \{0\}$

$A_0 = \{\emptyset\}$

$= p K_1(1, 0) + (1-p) \underbrace{K_1(0, \emptyset)}_{=0} = p(1-p)$

Also für $A \in \{0, 1\}^2$ ist $Q^{(1)}$ der zweifache Münzwurf, da
 Genauso für $A \in \{0, 1\}^n$ ist $Q^{(n)}$ der n -fache Münzwurf.

$$c.) \quad Z_n := \{ B \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists B_0 \in \text{Pot}(\{0,1\}^n) : B = B_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N} \setminus n} \}$$

$$Z := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

$$\text{Sei } B \in Z_n, \text{ also } B = B_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N} \setminus n} \quad \text{mit } A$$

$$B_n \in \text{Pot}(\{0,1\}^n) \quad \text{also} \quad B_n = B_n^a \times \dots \times B_n^a \quad \text{mit } B_n^a \in \text{Pot}(\{0,1\})$$

$$\text{also } B_n = \bigcup_{(w_1, \dots, w_n) \in B_n} \{w_1\} \times \{w_2\} \times \dots \times \{w_n\}, \quad \text{denn}$$

$$P(Z_n) := \sum_{(w_1, \dots, w_n) \in B_n} \prod_{i=1}^n p^{w_i} (1-p)^{1-w_i}$$

$$c.) \quad a(Z) = a\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right) = \{1,1,1,\dots\} \notin a(Z), \quad \{0,1,0,1,\dots\} \notin a(Z)$$

Weil man mit der kleinsten Algebra nur endliche Schritte erzeugen kann.