$\boxed{\text{Aufgabe 1a}}$ **Beh**: $X \perp\!\!\!\perp Y$, $P(X+Y=\alpha)=1 \Rightarrow X$ und Y konstant f.s.

Bew: $\boxed{1}$ **Beh**: Eine ZV $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ ist fast sicher konstant $\Leftrightarrow V(Z)=0$

Bew „$\Rightarrow$" $P(Z=\alpha)=1$

$1 = \int_{\Omega} 1_{Z=\alpha}\, dP \Rightarrow \mathbb{E}Z = \int_{\Omega} Z\, dP = \int_{\Omega\setminus N} \alpha\, dP + \int_{N} Z\, dP$

$= \alpha \Rightarrow VZ = \mathbb{E}(Z-\mathbb{E}Z)^2 = \int_{\Omega} (Z-\mathbb{E}Z)^2\, dP = \int_{\Omega\setminus N} (\alpha-\alpha)^2\, dP$

$+ \int_N (Z-\mathbb{E}Z)^2\, dP = 0$

„$\Leftarrow$" $0 = V(Z) = \int (Z-\mathbb{E}Z)^2\, dP \overset{\geq 0}{\Rightarrow} (Z-\mathbb{E}Z)^2 = 0$

fast sicher $\Rightarrow Z = \mathbb{E}Z$ fast sicher $\Rightarrow Z =$ konstant f.sicher

$\boxed{2}$ $0 \overset{\text{Vor.}}{=} V(X+Y) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} V(X)+V(Y) \overset{V\geq 0}{\Rightarrow} 0 = V(X) = V(Y) \overset{\boxed{1}}{\Rightarrow} X \underset{F}{=} Y$

f.sicher konstant. $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 7.1 b}}$ <u>Beh</u> $\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty \right\} \in \mathcal{T}_\infty$

<u>Bew</u>: $\left\{ \omega \in \Omega \middle| \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty \right\}$ Cauchykriterium

$\boxed{\text{Für jedes } k_0 \in \mathbb{N} \text{ gilt}}$

$=$

$\left\{ \omega \in \Omega \middle| \sum_{n=k_0}^{\infty} X_n(\omega) < \infty \right\} \underset{\text{Cauchy Kriterium}}{=} \{ \omega \in \Omega \mid \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \geq k_0\ \forall \ell \geq k :$

$\left| \sum_{n=k}^{\ell} X_n(\omega) \right| < 1/m \} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq k_0} \bigcap_{\ell \geq k} \underbrace{\left\{ \omega \in \Omega \middle| \left| \sum_{n=k}^{\ell} X_n(\omega) \right| < 1/m \right\}}_{} \in \sigma\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} \mathcal{F}_n \right)$

$\in \sigma\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} \mathcal{F}_n \right)$ denn jedes X_n ist bzgl. $\bigcup_{n=k_0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ mb.

Also $\{ \dots \} \in \bigcap_{k_0 \in \mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} \mathcal{F}_n \right) = \mathcal{T}_\infty$ $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 2a}}$ <u>Beh</u>: $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{E}\left(e^{i\langle s,X\rangle + i\langle t,Y\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(^{i\langle s,X\rangle}\right) \mathbb{E}\left(e^{i\langle t,Y\rangle}\right)$

<u>Bew</u>: Nach VL gilt zunächst: $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\iff P(X,Y)^{-1} = PX^{-1} \otimes PY^{-1} \iff \widehat{P(X,Y)^{-}} = \widehat{PX^{-1} \otimes PY^{-}}$$

Weiterhin: Sei $Z := (X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Dann

$$\widehat{P(X,Y)^{-}}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \widehat{PZ^{-}}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \int_\Omega e^{i\left\langle \binom{s}{t}, \binom{X}{Y} \right\rangle} dP = \mathbb{E}\left(e^{i\langle s,X\rangle + i\langle t,Y\rangle}\right)$$

<u>und</u>

$$\widehat{PX^{-1} \otimes PY^{-1}}(x) \overset{\text{FTrafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{i\langle x, z\rangle} \, d(PX^{-1} \otimes PY^{-})(dz)$$

für $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, denn $PX^{-} \otimes PY^{-}$ ist Maß auf $(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}))$.

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\left\langle \overbrace{\binom{s}{t}}^{=x}, \overbrace{\binom{x}{y}}^{=z} \right\rangle} dPX^{-} \, dPY^{-} = \mathbb{E}\left(e^{i\langle s,X\rangle}\right) \mathbb{E}\left(e^{i\langle t,Y\rangle}\right)$$

$\square$

2b) <u>Beh</u> Im: X, Y unabh $\Longrightarrow$ "$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$" gilt nicht die Umkehrung. <u>Bew</u> $\Omega := \{0,1,2\}$, $P: \Omega^2 \to [0,1]$ wie folgt

	0	1	2
0	$1/9$	$1/9-\alpha$	$1/9+\alpha$
1	$1/9+\alpha$	$1/9$	$1/9-\alpha$
2	$1/9-\alpha$	$1/9+\alpha$	$1/9$

Seien $Y, X: \Omega^2 \to \Omega$ Koordinaten.

Dann gilt $PX^{-1}(0) = P(\{(0,0),(0,1),(0,2)\})$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \alpha + \frac{1}{9} + \alpha = \frac{1}{3}$, $PX^{-}(1) = P\{(1,0),(1,1),(1,2)\} = \frac{1}{3}$, $PX^{-}(2) =$

$P(\{(2,0),(2,1),(2,2)\}) = \frac{1}{3}$. Also $\varphi_X(t) = \int_{\Omega^2} e^{i\langle t, X\rangle}\, dP = \int_{\Omega} e^{itx}\, dPX^{-}$

$\boxed{PX^{-} = \frac{1}{3}(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}$

$= \frac{1}{3}(e^{it0} + e^{it1} + e^{it2}) = \frac{1}{3}(1 + e^{it} + e^{2it})$.

Genauso $\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)$. Es gilt weiter $P(X+Y)^{-}(0) =$

$P\{(0,0)\} = \frac{1}{9}$, $P(X+Y)^{-}(1) = \{(0,1),(1,0)\} = \frac{2}{9}$, $P(X+Y)^{-}(3) = P((1,2),(2,1))$

$= \frac{2}{9}$, $P(X+Y)^{-}(2) = P(\{(1,1),(0,2),(2,0)\}) = 3/9$, $P(X+Y)^{-}(4) = \frac{1}{9}$

Also $P(X+Y)^{-} = \frac{1}{9}\delta_0 + \frac{2}{9}\delta_1 + \frac{3}{9}\delta_2 + \frac{2}{9}\delta_3 + \frac{1}{9}\delta_4$, also

$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{9}e^{0} + \frac{2}{9}e^{it} + \frac{3}{9}e^{2it} + \frac{2}{9}e^{3it} + \frac{1}{9}e^{4it}$ und

$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (1+e^{it}+e^{2it})(1+e^{it}+e^{2it}) = \frac{1}{9}(1+\underline{e^{it}}+\underline{e^{2it}}+\underline{e^{it}}+\underline{e^{2it}}$

$+\underline{e^{3it}}+\underline{e^{2it}}+\underline{e^{3it}}+e^{4it}) = \frac{1}{9}(1+2e^{it}+3e^{2it}+2e^{3it}+e^{4it})$

also $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$. Aber: $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{9} - \alpha \neq$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(X=0)\,P(Y=1)$

$\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ Bch $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)^T) = 0$

"$\Rightarrow$" $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$

$\operatorname{cov}(X,Y) := \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)^T\right) := \mathbb{E}\left((X_i - \mathbb{E}X_i)(Y_j - \mathbb{E}Y_j)\right)_{i,j}$

"$\Rightarrow$" $\mathbb{E}\left((X_i-\mathbb{E}X_i)(Y_j-\mathbb{E}Y_j)\right) = \mathbb{E}\left(X_i Y_j - X_i \mathbb{E}Y_j - \mathbb{E}X_i Y_j + E(X_i)E(Y_j)\right)$

$= E(X_i Y_j) - EY_j EX_i - EX_i EY_j + EX_i EY_j = 0$

$\boxed{EX_i EY_j = EX_i Y_j}$

$\boxed{1}$ Bch: $X_i \in \mathcal{L}^1$ Bew $\underbrace{\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R}}_{X_i}$

also $X_i = \pi_i \circ X$. Da π_i linear ist, ist mit X auch X_i messbar, also in $\mathcal{L}^P$ $\square$

$\boxed{2}$ Bch $EX_i EY_j = EX_i Y_i$ Bew Betrachte $X_i := \pi_i \circ X$, $Y_j = \pi_j \circ Y$

Dann $X_i^{-1}(A) = X^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) \in \sigma(X)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

denn Projektion ist $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^1$ mbar. Also gilt $\sigma(X_i) \subset \sigma(X)$ und $\sigma(Y_i) \subset \sigma(Y)$. Da $\sigma(Y)$ und $\sigma(X)$ n. Vor. unabh. sind, sind es auch $\sigma(X_i)$ und $\sigma(Y_i)$, also X_i und Y_i. Dann folgt Beh. mit VL $\square$

„$\Longleftarrow$" Für $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt nach Vor.

$$\Sigma\underbrace{(X,Y)}_{=:Z} = \begin{pmatrix} \Sigma(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & \Sigma(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma(X) & 0 \\ 0 & \Sigma(Y) \end{pmatrix}$$

Berechne für $Z := (X,Y)$:

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle s, X\rangle + i\langle t, Y\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle \binom{s}{t}, \binom{X}{Y}\rangle}\right) = \mathbb{E} e^{i\langle \binom{s}{t}, Z\rangle} \overset{\text{nvt.}}{=} e^{i\langle EZ, \binom{s}{t}\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \binom{s}{t}, \Sigma(Z)\binom{s}{t}\rangle}$$

$$= e^{i\langle \binom{EX}{EY}, \binom{s}{t}\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \binom{s}{t}, \begin{pmatrix} \Sigma(X) & 0 \\ 0 & \Sigma(Y) \end{pmatrix}\binom{s}{t}\rangle}$$

$$= e^{i\langle EX, s\rangle} e^{i\langle EY, t\rangle} e^{-1/2\langle s, \Sigma(X) s\rangle} e^{-1/2\langle t, \Sigma(Y) t\rangle}$$

$= \mathbb{E}\, e^{i\langle s, X\rangle}\, \mathbb{E}\, e^{i\langle t, Y\rangle}$. Also sind X, Y unabh. nach voriger Aufgabe $\square$

Wegen $X = \pi_1 \circ Z$, $Y = \pi_2 \circ Z$ sind X, Y auch normalvt. denn π_1, π_2 sind linear

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ <u>Beh</u> $E((f \circ X) \cdot (g \circ Y)) = E(f \circ X)\, E(g \circ Y) \quad \forall f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mb. $\Longrightarrow X, Y$ unabh.

<u>Bew</u>: Sei $f = 1_A$, $g = 1_B$. Dann $P(X \in A)\, P(Y \in B)$

$$= \int_A \cancel{X}\, dPX^{-1} \cdot \int_B dPY^{-1} = \int 1_A \, dPX^{-1} \int 1_B \, dPY^{-1} = \int 1_A \circ X \, dP$$

$$\int 1_B \circ Y \, dP = \int f \circ X \, dP \int g \circ Y \, dP = E(f \circ X)\, E(f \circ Y)$$

$$\overset{\text{Vor}}{=} E\big((f \circ X) \cdot (f \circ Y)\big) = \cancel{E} \int (f \circ X)(g \circ Y) \, dP = \int (1_A \circ X)(1_B \circ Y) \, dP$$

$$= \int 1_{\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}} \, dP = P(X \in A, Y \in B) \quad \square$$