$\boxed{\text{Aufgabe 8.1a)}}$ Beh.: $\forall \varepsilon > 0: \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \iff X_n \xrightarrow{f.s.} X$

a)

Den ~~[illegible]~~ "$\boxed{2}\Rightarrow$" $X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega) \iff |X_n(\omega) - X| \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n: |X_m - X| \leq \varepsilon$

$\iff \omega \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \{|X_m - X| \leq \varepsilon\}$ "$\Rightarrow$" $\boxed{3}$ $\boxed{\text{Sei } \varepsilon > 0}$ $P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0) = P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| \leq \varepsilon)$

$\overset{\boxed{2}}{=} P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \{|X_m - X| \leq \varepsilon\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right)$

$= 1 - P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) \overset{\text{Vor.}}{=} 1$ "$\Rightarrow$"

"$\Rightarrow$" $\sum P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) < \infty \overset{\text{BC}}{\Rightarrow} P(\overline{\lim}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

"$\Leftarrow$" $\boxed{\text{Sei } X \overset{\text{P-f.s.}}{\equiv} \alpha \doteq \text{const}}$ $\boxed{1}$ Sei $\varepsilon > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - \alpha| > \varepsilon) = \infty$. Wegen $\{|X_n - \alpha| > \varepsilon\} =$

$\{X_n < -\varepsilon + \alpha\} \cup \{X_n > \varepsilon + \alpha\} \in \sigma(X_n)$ und der Unabhängigkeit von

X_n also der σ-Algebren $(\sigma(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sind die Ereignisse

$\left(\{|X_n^{\boxed{-\alpha}}| \geq \varepsilon\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Mit BC folgt $P(\overline{\lim}\, \{|X_n^{\boxed{-\alpha}}| > \varepsilon\})$

$= 1$ und daher genau wie in $\boxed{2}$ $P(\lim |X_n^{\boxed{-\alpha}}| = 0) = 0$ $\square$

$\boxed{2}$ Beh: $X = \lim X_n$ ist messbar bzgl. $\mathcal{T}_\infty = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \sigma(X_n)\right)$

Bew Für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt: $A := \{\omega \in \Omega \mid \lim X_n(\omega) = X\}$

$\overset{\text{Cauchy}}{=} \{\omega \in \Omega \mid \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \geq k_0\ \forall s,t \geq k : |X_s - X_t| \leq 1/m\}$

$= \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{k \geq k_0} \bigcap\limits_{s,t \geq k} \underbrace{\{|X_s - X_t| \leq 1/m\}}_{\in \sigma\left(\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} \sigma(X_n)\right)} \in \sigma\left(\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} \sigma(X_n)\right)$

Also $A \in \bigcap\limits_{k_0 \in \mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} \sigma(X_n)\right)$ $\square$

$\boxed{3}$ <u>Beh</u> X ist f-s. konstant, also $P(X=\alpha)=1$

<u>Bew</u> Für $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt $\{X \le \gamma\} \in \mathcal{T}_\infty$ nach $\boxed{2}$ also $P(X \le \gamma) \in \{0,1\}$ nach Kolmogoroff. Sei $C = \{\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(X \le \gamma) = 1\}$. Sei $\alpha = \inf C$. Sei $\gamma_n \downarrow \alpha$ mit $\gamma_n \in C$. Wegen $\{X \le \gamma_n\} \downarrow \{X \le \alpha\}$ folgt $\alpha \in C$, denn $P(X \le \alpha) = \lim_{n\to\infty} P(X \le \gamma_n) = 1$. Also $\alpha = \min C$.

Also $P(X < \alpha) = 0$ also $P(X = \alpha) = 1$ $\square$

b) $\boxed{1}$ <u>Eine Ziehung</u>: $\tilde{\Omega} = \{ (S, Z) \in \mathcal{P}ot(\{1,..,45\}) \times \{1,..,45\} \mid |S| = 6, Z \notin S \}$

$\tilde{F} = \mathcal{P}ot(\tilde{\Omega})$, $\tilde{P}(\omega) = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} = \frac{1}{\binom{45}{6} \cdot (49-6)}$

$\boxed{2}$ <u>∞-viele Ziehungen</u>: $\Omega := \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}}$, $F := \tilde{F}^{\mathbb{N}}$, $X_n := \Omega \to \tilde{\Omega}$

Projektionen $\hat{=}$ n-te Ziehung, $P = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \tilde{P}$,

Als Projektionen sind also die $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige ZV.

$\boxed{3}$ <u>Ziehung in Woche $i = 0,..,6$</u>: $a_i := \{ \{7i+1,..,7i+6\}, 7i+7 \} \in \tilde{\Omega}$

$X_n^{-1}(a_i) =: A_n^i$ = Ziehung i-te Woche in Koordinate n

<u>Interessantes Ereignis E</u>: $E_n := \bigcap_{i=0}^{6} A_{n+i}^{i}$ (beginnt ab Woche n)

$\boxed{4}$ <u>Beh</u> $(E_{7n})_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig.

Bew: Sei $i_1 < \dots < i_k$. Dann $P(E_{7i_1} \cap \dots \cap E_{7i_k}) = P(X_{7i_1} = a_0,$

$\dots, X_{7i_1+6} = a_6, \dots, X_{7i_k} = a_0, \dots, X_{7i_k+6} = a_6) \underset{(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ unabh.}}{=} P(X_{7i_1} = a_0, \dots, X_{7i_1+6} = a_0) \cdot$

$\dots \cdot P(X_{7i_k} = a_0, \dots, X_{7i_k+6} = a_6)$. $\square$

$\boxed{5}$ $P(E_{7n}) = P(X_{7n} = a_0, \dots, X_{7n+6} = a_6) = P(X_{7n} = a_0) \cdots P(X_{7n+6} = a_6)$

$= \tilde{P}(a_0) \cdots \tilde{P}(a_6) = \left(\frac{1}{|\hat{\Omega}|}\right)^7 > 0$

$\boxed{6}$ $\sum P(E_{7n}) \overset{\boxed{5}}{=} \infty$, E_{7n} unabh. nach $\boxed{4}$ $\overset{BC}{\Rightarrow}$ $1 = P(\overline{\lim}\, E_{7n})$

$= P(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in E_{7n}$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}\}) \leq P(\{\omega \in \Omega \mid$

$\omega \in E_n$ ∞-oft$\})$

$\boxed{\text{Aufgabe 8.2}}$ $\quad P = PT^{-1} \iff P((0,1)) = 0$

Bew „$\Rightarrow$" $\boxed{1}$ $x \in (0,1)$: $T^{-n}([x,1]) = [x^{1/2^n}, 1] \downarrow \{1\}$

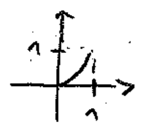
f. $n \to \infty$ $\quad \boxed{2}$ $[\frac{1}{k}, 1] \downarrow (0,1]$ f. $k \to \infty$

$\boxed{3}$ $P((0,1)) = P((0,1]) - P(\{1\}) = \lim\limits_{k \to \infty} P([1/k, 1]) - P(\{1\})$

$\overset{\boxed{1,5}}{=} \lim\limits_{k \to \infty} P(\{1\}) - P(\{1\}) = 0$

$\boxed{1,5}$ $P([x,1]) = \lim\limits_{n \to \infty} P([x,1]) \overset{\text{Maßstetig}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} PT^{-n}([x,1]) \overset{\boxed{1}}{=} P(\{1\})$

$\forall x \in (0,1)$



„$\Leftarrow$" $\boxed{1}$ $A \subset (0,1) \overset{T(x)=x^2}{\iff} T^{-1}(A) \subset (0,1)$ also $PT^{-1}(A) \overset{\text{Vor}}{=} 0 =$

$P(A)$ $\quad \boxed{2}$ $0 \in A \iff T^{-1}(A) \ni 0$, $1 \in A \iff T^{-1}(A) \ni 1$ analog

$\boxed{\text{Aufgabe 8.3}}$

„$\Rightarrow$" Für $A \in F$ $\boxed{A\ T\text{-invariant}}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $P(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(A)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(A \cap T^{-k}(A)) \xrightarrow[\text{Vor}]{n \to \infty} P(A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A) \in \{0,1\}$

$\Rightarrow$ T ergodisch

„$\Leftarrow$" Seien $B, A \in \mathcal{F}$. Zu 1_B gibt es nach Ergodensatz eine ZV y mit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_B \circ T^j = y$ $\boxed{\text{und } E(y) = E(1_B) = P(B)}$. Da T ergodisch ist, ist y P-f.s. konstant, also $E(y) = y$. Damit folgt $P(A)P(B) = P(A) \cdot E(y)$

$= E(y) \int_A dP = \int_A y \, dP = \int_A \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_B T^j \, dP$

$$\underset{\boxed{\text{Lebesgue}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_B T^j \, dP = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int 1_A \, 1_{T^{-j}B} \, dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P(A \cap T^{-1}(B))$$

Aufgabe 8.4 Der Verschiebungsoperator ist definiert durch

$S: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $S(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$.

1 Bh S ist maßerhaltend bzgl. $P := \frac{1}{2}(\delta_{\omega_0} + \delta_{\omega_1})$ Bew Zu zeigen ist

$P(A) = P(S^{-1}(A))$ f alle $A \in \mathcal{F}$, wo $\mathcal{F}$ σ-Algebra auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Da P nur von ω_1 und ω_0 abhängt, reicht es ~~zu~~ folgende Fälle zu betrachten:

a) $\omega_1 \in A, \omega_2 \in A \Rightarrow \omega_2 = S^{-1}\omega_1, S^{-1}\omega_2 = \omega_1 \in S^{-1}(A)$

b) $\omega_1 \notin A, \omega_2 \notin A \Rightarrow S^{-1}\omega_1, S^{-1}\omega_2 \notin S^{-1}(A)$

c) $\omega_1 \in A, \omega_2 \notin A \Rightarrow S^{-1}\omega_1 = \omega_2 \in S^{-1}(A)$, $S^{-1}\omega_2 = \omega_1 \notin S^{-1}(A)$

d) nicht c)

In allen Fällen gilt offenbar $P(A) = P S^{-1}(A)$

$\boxed{\text{also ist S ergodisch}}$

2 Bh $\forall A \in \mathcal{J} : P(A) \in \{0,1\}$! Bew Sei $A = S^{-1}(A)$, also $A \in \mathcal{J}$.

Genauso wie oben sieht man dass nur a) und b) eintreten, also $P(A) \in \{0,1\}$ $\square$

$\boxed{3}$ **Bh** $\mathcal{T}_\infty \neq \mathcal{J}$ **Bw** Sei $\omega^{(0)} = (\omega^{(0)}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ also als Folge.

$$A := \{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \exists N\in\mathbb{N}\ \forall k\geq N: x_k = \omega^{(0)}_k \}, \quad \Omega = \{0,1\}$$

$$= \bigcup_{N=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{N\text{-mal}} \times \{\omega^{(0)}_{N+1}\} \times \{\omega^{(0)}_{N+2}\} \times \cdots \Big) =: \bigcup_{N=0}^{\infty} C_N$$

Seien $\Pi_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \Omega$ die Projektionen. Dann $\sigma(\Pi_k) = \sigma$

$$(\{\Pi_k^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{P}\{0,1\}\}) = \sigma(\{\Omega \times \dots \times \Omega \times \underset{\boxed{k}}{B} \times \Omega \times \dots \} \mid B \in \mathcal{P}\Omega\}),$$

gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$

also $C_N \in \sigma(\bigcup_{k\geq n} \sigma(\Pi_k)) = \sigma(\{\Omega \times \dots \times \underset{\boxed{n}}{\Omega} \times B_{n+1} \times B_{n+1} \times \dots \mid B_i \in \mathcal{P}\Omega\})$

$\forall N\in\mathbb{N}$, also $A = \bigcup_{N=0}^{\infty} C_N \in \sigma\big(\bigcup_{k\geq n} \sigma(\Pi_k)\big)$ f. alle $n\in\mathbb{N}$.

Also $A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\sigma \bigcup (\sigma(\Pi_k)\big) = \mathcal{T}_\infty$. Aber $\omega^{(0)} \notin A$. Somit $P(A) = \frac{1}{2}$ $\square$