

Ja Bede $P := \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$ ist T-~~erwartungstreu~~ ^{invariant} Bew ~~unvollständig~~

$$(\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2) T^{-1}(A) := \lambda P_1 T^{-1}(A) + (1-\lambda) P_2 T^{-1}(A) \stackrel{P_1, P_2 \in \mathcal{I}}{=} \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A) = (\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2)(A)$$

Ja $P(A) \in [0,1]$ für $A \in \mathcal{A}$: ~~Sei $A = T^{-1}(A)$ Dann~~

$$P(A) = (\lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A)) \stackrel{P_1, P_2 \text{ ergütlich}}{=} T_{P_1, P_2} \text{ ergütlich}$$

Aufgabe 9.11 6) Beh P mit egodisch $\Leftrightarrow P$ mit extremal

Bew " $\Rightarrow$ " [1] P γ egodisch $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{G}$ mit $0 < P(A) < 1$

[2] Sei $P_n \xrightarrow{\text{fast}} [0,1]$, $B \mapsto P(B|A)$ ~~ist~~. Dann ist $P_n \in \mathcal{I}$, denn:

$$P_n T^{-n}(B) = P(T^n(B) \cap A) = \frac{1}{P(A)} (P(T^n(B) \cap A)) \stackrel{\text{Aes}}{=} \frac{1}{P(A)} P(T^{-n}B \cap A)$$

$$= \frac{P(T^{-n}(B \cap A))}{P(A)} \stackrel{P \in \mathcal{I}}{=} \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B|A) = P_\gamma(B)$$

[3] Analog zu [2] ist $P_2: \hat{\mathcal{X}} \rightarrow [0,1]$, $B \mapsto P(B|A^c) \in \mathcal{I}$

$$[4] \text{ Es gilt } P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= \lambda_A P_1(B) + \lambda_{A^c} P_2(B) \quad \text{mit } \lambda_A + \lambda_{A^c} = 1$$

also P mit extremal ~~ist~~ und $\lambda_A \neq 0$ und [4].

Def. 1. [7] Sei P_n nicht egodisch. Dann gilt es $A \in \mathcal{I}$ mit

$$0 < P_n(A) < 1. \quad \text{Also} \quad 0 < \lambda P_n(A) \leq P(A) \in \lambda P_n(A) + (1-\lambda)$$

$\leq \lambda + (1-\lambda) = 1$. Also P nicht egodisch

2. P_n, P_2 seien egodisch: Wäre $P_n \neq P_2$ gdt es $A \in \mathcal{I}$ mit

$$P_n(A) \neq P_2(A). \quad \text{Betrachte} \quad B := \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j)}(\omega) = P_n(A) \right\}$$

Dann gilt $P(B) = T^{-1}(B)$ denn: $\omega \in B \iff T\omega \in B$ für $\omega \in T(B)$

$$\begin{aligned} \text{also } \sum_{j=0}^{n-1} T^j(\omega) \in B &: \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j)}(T\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j+n)}(\omega) = \frac{1}{n} \left(1_A T^{(n)}(\omega) \right. \\ &\quad \left. + 1_A T^{(n+1)}(\omega) + \dots + 1_A T^{(2n-1)}(\omega) \right) = \underbrace{-\frac{1}{n} 1_A T^{(0)}(\omega)}_{\in \mathcal{O}(1/n)} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j)}(\omega) + \frac{1}{n} 1_A T^{(n)}(\omega) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + P_n(A) + 0 \quad \text{"} \quad \omega \in T(B) \implies T\omega \in B \implies \omega \in T^{-1}(B) \implies \omega \in B$$

$$\begin{aligned} \text{Also} \quad 0 &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j)}(T(\omega)) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1_A T^{(j+n)}(\omega) \rightarrow 0 \\ &\implies \omega \in B \quad \square \end{aligned}$$

Nach dem Ergodensatz ist die Konvergenz in L^2 P_n -f.s. also

$P_n(B) = 1$. Also auch $P_2(B) = 0$ (denn $P_2(\tilde{B}) = 1$ für eine

unendliche Menge $\rightarrow P_2(A)$).

Also $P(B) = \lambda + (1-\lambda) = 1$ und P

also nicht ergodisch.

□ Sei P nicht extremal. Dann gilt es $P_1, P_2 \in \mathcal{I}$

$P_1 \neq P_2$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$

$$= e^{i\langle \underline{z}, CB^{-1} \underline{z} \rangle} e^{i\langle \underline{z}, \underline{q}_0 \rangle - \frac{1}{2} \langle \underline{z}, D \underline{z} \rangle}$$

$\tilde{Q} = Q(\underline{0}, \cdot)$ ist Normalv. mit Erwartungswert $\underline{q}_0 = \underline{a} - CB^{-1}b$
 und Kovarianz D

$$= e^{i\langle \underline{z}, \underline{q}_0 + CB^{-1} \underline{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle \underline{z}, D \underline{z} \rangle}$$

$$= e^{i\langle \underline{z}, \underline{q}_0 \rangle - \frac{1}{2} \langle \underline{z}, D \underline{z} \rangle}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle} dQ(\underline{y}, \cdot)(\underline{z}) \quad A_{KO} : \widehat{Q(\underline{y}, \cdot)} =$$

$$\widehat{Q \circ T_{\underline{z}}}$$

$$\Rightarrow : Q(\underline{y}, M) = \tilde{Q} \circ T_{\underline{z}}(M) = Q(\underline{0}, M)$$

$$\boxed{M \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}}$$

$$\boxed{Q(\underline{z}, \cdot) \text{ Normalv.}}$$

[2] $\overline{z \in \mathbb{R}^n} : \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(y, (-\infty, t]) \cap \alpha\} \neq \emptyset$

Bem $\forall y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha \} \subset \mathbb{R}^n$ off

$\{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\}$

Bem $z \in \mathbb{R}^n : \exists \delta > 0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$

[1] $Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha \iff \exists \delta > 0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$

[3] $\exists \delta > 0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$

[2] Da $Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha$, gibt es in [1] $\epsilon > 0$ und $\delta_1 > 0$, so dass $Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha$. (durch Wahl von ϵ konnte beliebig

made an do lassen)

CB^- linear

[3] $\exists \delta_1 > 0$ an [2] $\exists \delta_2 > 0 : \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n \mid Q(0, (-\infty, t - CB^-y)) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$

Es folgt dass $\{Q(y, (-\infty, t]) < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n$ offen ist

$$\exists \text{ } \underline{B_k} \mathcal{D} := \{ M \in \mathcal{D}_m : Q(\cdot, M) \mid_{\mathcal{B}_k} = \mathcal{B}_k - \text{mb} \} \mid_{\mathcal{B}_k} + \mathcal{D}_{\text{yukin}} - \mathcal{D}_{\text{sch}}$$

Bew:

$$\underline{\phi \in \mathcal{D}} : Q(\cdot, \phi) = 0 \Rightarrow \phi \in \mathcal{D}$$

$$\underline{M \in \mathcal{D} \Rightarrow M^c \in \mathcal{D}} : Q(\cdot, M^c) = 1 - Q(\cdot, M) \text{ m.b. da } M \in \mathcal{D}$$

$$\underline{\cup_{k \in \mathbb{N}} M_k \in \mathcal{D}} : \text{Sei } (M_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ und } M_k \cap M_l = \emptyset \text{ f. } k \neq l,$$

$$\text{D gilt } Q(\cdot, \cup_{k \in \mathbb{N}} M_k) \stackrel{\text{Meb}}{=} \sum \underbrace{Q(\cdot, M_k)}_{\text{mb}} \text{ messbar, also}$$

$$\cup_{k \in \mathbb{N}} M_k \in \mathcal{D}. \quad \square$$

[4] $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System, dass der σ -stabile Erzeuger $\mathcal{P}(\cdot, \{-\infty, t\})$ ~~erzeugt~~ von $\mathcal{D}_m$ enthält, also $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_m)$. $\square$

d) Berechne die FT von $P(x|y)^{-1}$ und $P(y^{-1}|x)$

$$\widehat{P(y^{-1}|x)}\left(\frac{1}{s}\right) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{i\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \rangle} (P(y^{-1}|x)) (d(x,y))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, y \rangle} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle s, x \rangle} Q(y, dx) P(y^{-1}(dy))$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle s, x \rangle} Q(y, dx)}{\int_{\mathbb{R}^m} 1 dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle s, x \rangle} Q(y, dx)}{\text{Nuf.}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle t, y \rangle} e^{i\langle s, y \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle s, Ds \rangle} P(y^{-1}(dy)) \quad y = a + CB^{-1}y - CB^{-1}b$$

$$= e^{i\langle s, a - CB^{-1}b \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle s, Ds \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, y \rangle} e^{i\langle s, CB^{-1}y \rangle} dP(y^{-1})$$

$$= e^{i\langle s, a - CB^{-1}b \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle s, Ds \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t + (CB^{-1})^T s, y \rangle} dP(y^{-1}) \quad \text{Nuf.}$$

$$= e^{i\langle s, a - CB^{-1}b \rangle} e^{-1/2 \langle s, Ds \rangle} \cdot e^{i\langle t + (CB^{-1})^T s, b \rangle} e^{-1/2 \langle t + (CB^{-1})^T s, B(t + (CB^{-1})^T s) \rangle}$$

$$= e^{i\langle s, a \rangle} \frac{e^{i\langle s, -(CB^{-1})b \rangle}}{e^{-1/2 \langle s, Ds \rangle}} \frac{e^{i\langle t, b \rangle}}{e^{i\langle (CB^{-1})^T s, b \rangle}} \underbrace{e^{i\langle (CB^{-1})^T s, s \rangle}}_{=0}$$

$$e^{-1/2 \langle t + Bt, B(CB^{-1})^T s \rangle} e^{-1/2 \langle CB^{-1})^T s, Bt \rangle}$$

$$e^{-1/2 \langle (CB^{-1})^T s, B(CB^{-1})^T s \rangle}$$

$$\boxed{(B^{-1})^T = B^{-1}}$$

$$= e^{i\langle \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle} e^{-1/2 \langle s, (A - CB^{-1}C^T)s \rangle} e^{-1/2 \langle t, Bt \rangle}$$

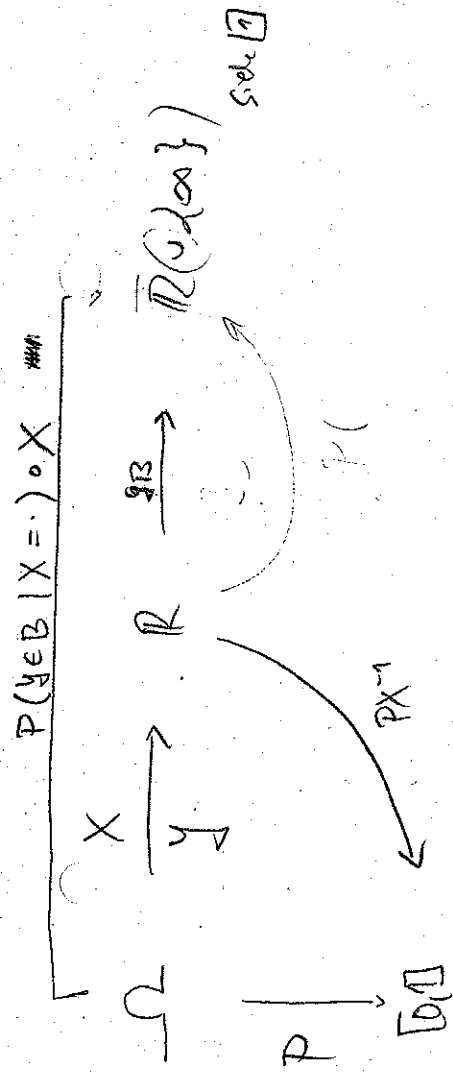
$$e^{-1/2 \langle t + Bt, C^T s \rangle} e^{-1/2 \langle s, C^T B^{-1} C^T s \rangle}$$

$$= e^{i\langle \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle} e^{-1/2 \langle s, A s \rangle} e^{-1/2 \langle t, Bt \rangle} e^{-1/2 \langle C^T s, C^T s \rangle} e^{-1/2 \langle s, C^T B^{-1} C^T s \rangle}$$

$$= e^{i\langle \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle} e^{-1/2 \langle \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C^T B \\ C^T B & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \rangle} = \underbrace{P(X|Y)}_{= \sum P(X_i|Y_i)}$$

□

Aufgabe 9.3



Def 5.11: $g_B \circ X$ ist eine bedingte Erwartung von $P(y \in B | X = \cdot) \circ X$

gegeben $\mathcal{D} := \sigma(g_B \circ X) \subset \mathcal{F}$ wenn gilt

$$\int_{\mathcal{D}} g_B(X) dP = \int P(y \in B | X = \cdot) \circ X dP$$

$\forall C \in \mathcal{D}$.

Zu 1: zu zeigen bleibt, dass $g_B : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbar ist.

Da $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ messbar ist, ist $f_X(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y)$

auch $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, also ist auch $g_B(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x,y) d\lambda(y)$ $\mathcal{B}$ -messbar.

Ansonsten gilt $g_B \in [0,1]$, denn $g_B(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} d\lambda(y) = 1$.

□ Für die rechte Seite gilt: $\int P(Y \in B | X = \cdot) \circ X dP = \int_{X(B)} P(Y \in B | X = \cdot) dP X^{-1}$

$= \int_{X(B)} P(Y \in B | X = \cdot) dP$ nach Satz 5.10. Es reicht also zu zeigen:

$$\int_A g_B(x) dP X^{-1} = P(Y \in B, X \in A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}.$$

$$\int_A g_B(x) dP X^{-1} = \int_{A \cap \{f_X \in (0, \infty)\}} \frac{f_X(x)}{f_X(x)} \lambda(d_Y) dP X^{-1}(d_X)$$

Für $f_X(x) = 0$

$$= \int_B \int_{A \cap \{f_X \in (0, \infty)\}} \frac{f_X(x)}{f_X(x)} \lambda(d_X) \lambda(d_Y)$$

folgt

$$= P(Y \in B, X \in A \cap \{f_X \in (0, \infty)\}) = P(Y \in B, X \in A)$$

denn $f_X \in (0, \infty)$ P -sicher, weil:

$$P(X \in \{f_X = 0\}) = P(X^{-1} \{f_X = 0\}) = \int_{\{f_X = 0\}} 1 \, dP_X$$

$$\stackrel{\text{Dichte}}{=} \int_{\{f_X = 0\}} f_X \, d\lambda(x) = 0$$

$$\text{und } 1_{\mathbb{R}} \circ P(X \in \{f_X = \infty\}) = \int_{\{f_X = \infty\}} f_X \, d\lambda \geq \lambda(\{f_X = \infty\})$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $\lambda(\{f_X = \infty\}) = 0 \Rightarrow$

$$P(X \in \{f_X = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f_X = \infty\}} n \, d\lambda = 0 \quad \square$$

Stochastik
Tutor

Aufgabe 9.4.

Beh $f \circ T = f$ μ -fast sicher

$$\text{Bew} \int_A f \circ T d\mu = \int_{T^{-1}(A)} f d\mu \stackrel{(*)}{=} \int d\nu = \nu(T^{-1}(A))$$

$$= \nu(A) = \int_A d\nu = \int_A f d\mu \quad \begin{matrix} f \geq 0 \\ \Rightarrow \\ f \circ T \geq 0 \end{matrix} \quad f \circ T = f \quad \mu - \text{fs}$$

Beh $\mu = \nu$ Bew Es gilt

$$f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$$

$$\xrightarrow[\text{begl. } \mu]{T \text{ erg.}} \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} d\nu \stackrel{\mu-\text{fs}}{=} 1 \quad \text{also} \quad f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega)$$

$= 1$ also $\nu = \mu$ μ -fast sicher. Sei N eine Null-

menge bzgl. μ . Weil $0 \leq \nu$ gilt: $\mu(N) = 0 \Rightarrow \nu(N) = 0$. Also $\mu = \nu$ $\square$