Aufgabe 10.1 Sei $Z(\omega) := \sum_{\substack{i=1 \\ P(A_i)>0}}^{n} \left(\frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} Y \, dP \right) 1_{A_i}(\omega)$. Es reicht

zu zeigen, daß Z eine Version von Y ist, denn Versionen sind eindeutig. Zu zeigen also $\boxed{1}$ $\int_C Z \, dP = \int_C Y \, dP \quad \forall C \in \mathcal{D} =$

$\sigma(A_1, \dots, A_n)$: Da $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$ (*) reicht es die Beh. für A_1

zu zeigen:
$$\int_{A_1} Z \, dP = \int_{A_1} \left(\frac{1}{P(A_1)} \int_{A_1} Y \, dP \right) dP = \int_{A_1} \frac{1}{P(A_1)} dP \cdot \int_{A_1} Y \, dP$$

$$= \int_{A_1} Y \, dP$$ und $\square$

(*) und $\sigma(A_1, \dots, A_n) = \left\{ \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i \;\middle|\; I \in \{1, \dots, n\} \right\}$ $\boxed{\emptyset \cup}$

$\boxed{2}$ Z ist messbar bezüglich $\sigma(A_1, \dots, A_n)$, denn 1_{A_i} ist messbar bzgl. $\sigma(A_1, \dots, A_n)$ $\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ $\boxed{a}$

$\boxed{1}$ Z ist $\mathcal{C}$ - meßbar: Mit y und f ist Z

$\mathcal{B}$ - meßbar. Sei $A \in \mathcal{B}$, dann: $Z^{-1}(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid Z(x) \in A \}$

$$\overset{\text{Def. } Z(x)}{=} \{ x \in \mathbb{R} \mid Z(-x) \in A \}, \underbrace{}_{\boxed{= -Z^{-1}(A)}} \Rightarrow Z^{-1}(A) = \left(Z^{-1}(A) \cap [0,\infty) \right) \cup$$

$$\left(\overbrace{+ Z^{-1}(A)}^{= -Z^{-1}(A)} \cap [0,-\infty) \right) = \left(\underbrace{Z^{-1}(A) \cap [0,\infty)}_{\in \mathcal{B}([0,\infty))} \right) \cup - \left(\underbrace{Z^{-1}(A) \cup [0,\infty)}_{\in \mathcal{B}([0,\infty))} \right) \in \mathcal{C}. \quad \square$$

$\boxed{2}$ Also Sei Z $C \in \mathcal{C}$ mit $C = D \cup (-D)$ und $D \in \mathcal{B}([0,\infty))$:

$$\int_C Z \, dP \overset{f \text{ Dichte}}{=} \int_D Z f \, d\lambda + \int_{-D} Z f \, d\lambda = \int_D Z(x) f(x) \, d\lambda(x) + \int_D Z(-x) f(-x)$$

$$d\lambda(x) = \int_D \left(Z(x) f(x) + \overbrace{Z(-x)}^{= Z(x)} f(-x) \right) d\lambda(x) = \int_D Z(x) [f(x) + f(-x)] \, d\lambda x$$

$$= \int_D y(x) f(x) + y(-x) f(-x) \, d\lambda x = \int_D y f \, d\lambda + \int_{-D} y(+x) f(+x) \, d\lambda = \int_C y \, dP$$

b) Wegen $f(x) = f(-x)$ gilt $z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y(x) + y(-x)) & : f(x) > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$

Wegen $Z = \mathbb{E}(y \mid \mathcal{C}) = \mathbb{E}(1_{[1,3]} \mid \mathcal{C}) = P([1,3] \mid \mathcal{C})$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1_{[1,3]}(x) + 1_{[-3,-1]}(x)\right) & : f > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} = \frac{1}{2} 1_{\{f>0\}}(x)\, 1_{[1,3] \cup [-3,-1]}(x)$$

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$ $\boxed{1}$

$$(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y)^2 = (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))^2 + (\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y)^2$$

$$+ 2(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y) = (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))^2 + (\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y)^2$$

$$+ 2\Big(X\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - Xy - \mathbb{E}(X|\mathcal{A})\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) + y\mathbb{E}(X|\mathcal{A})\Big) \Rightarrow$$

$$f(y)^2 = \mathbb{E}((X-y)^2) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))^2\big) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y)^2$$

$$+ 2\,\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{A}))\Big) \underbrace{- 2\underbrace{\mathbb{E}Xy}_{\boxed{X, y \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow X \cdot y \in \mathcal{L}^1}} + 2\,\mathbb{E}(\underbrace{y\,\mathbb{E}(X|\mathcal{A})}_{\overset{5.16}{\underset{y\ \mathcal{A}\text{-mb}}{=}} \mathbb{E}(yX|\mathcal{A})})}_{=0}$$

$$\underbrace{}_{= \mathbb{E}(yX) \text{ weil } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}}$$ Versae

~~Ab~~ $f(y)$ minimal $\Leftrightarrow$ $f(y)^2$ minimal

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) - y)^2)$ minimal

$\Leftrightarrow$ $y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$ P-fs

Aufgabe 4

1 Die Abbildung $\mu(C) := \int_C y \, dP$ ist f. $C \in \mathcal{D}$ ein Maß. Außerdem gilt: $P(C) = 0 \overset{y \in \mathcal{L}^1}{\Longrightarrow} \mu(C) = 0$, daher $\mu \ll P$ und es ex. die RN-Ableitung $\mathbb{E}(y|\mathcal{D}) := \frac{d\mu}{dP}$

so dass gilt: $\int_C \mathbb{E}(y|\mathcal{D}) \, dP \overset{RN}{=} \int_C d\mu \overset{Df.}{=} \mu(C) \overset{Df}{=} \int_C y \, dP$ $\square$

2 <u>1. Fall $c \geq 0$:</u> Nach 5.14 (d) ist mit $y = c \geq 0$ auch $\mathbb{E}(y|\mathcal{D}) \geq 0$ P-f.s. Dann gilt: $\int_\Omega \mathbb{E}(y|\mathcal{D}) \, dP = \int_\Omega y \, dP = \int_\Omega c \, dP \overset{\geq 0}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(y|\mathcal{D}) \overset{P\text{-f.s.}}{=} c \; P|_{\mathcal{D}}$

<u>2. Fall $c \leq 0$:</u> $0 \geq c = y$

$\Longrightarrow -y = -c \geq 0 \overset{1. Fall}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(-y|\mathcal{D}) = -c \overset{\mathbb{E} \text{ linear}}{\Longrightarrow} -\mathbb{E}(y|\mathcal{D}) = -c$

$\mathbb{E}(y|\mathcal{D}) = c$

$\boxed{3}$ Es sei $-c \le y \le c$. Dann gilt

$y \le c \Rightarrow \exists\, Z \geq 0 : y + Z = c \Rightarrow \mathbb{E}(y + Z \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(y \mid \mathcal{D})$

$+ \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(c \mid \mathcal{D}) \underset{Z \geq 0}{\overset{c = \text{const}}{\Longrightarrow}} \mathbb{E}(y \mid \mathcal{D}) \le c$

Für $-y \le +c$ gilt: $\exists\, Z \geq 0 : -y + Z = c \Rightarrow$

$c = \mathbb{E}(c \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(-y + Z \mid \mathcal{D}) = -\mathbb{E}(y \mid \mathcal{D}) + \underbrace{\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{D})}_{\geq 0}$

$\Rightarrow -\mathbb{E}(y \mid \mathcal{D}) \le c \Rightarrow \mathbb{E}(y \mid \mathcal{D}) \geq -c$

Insgesamt $|\mathbb{E}(y \mid \mathcal{D})| \le c$