НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТЫ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ $\mathbf{G(E_7, R)}$

А. Ю. ЛУЗГАРЕВ

Одним из важнейших инструментов при изучении группы Шевалле типа E_7 в 56-мерном представлении является инвариантная биквадратная форма и ее частичные поляризации. Эту форму впервые построил Эли Картан (для поля характеристики 0); впоследствии ее изучали Ганс Фрейденталь, Жак Титс, Роберт Браун, Майкл Ашбахер, Брюс Куперстейн, Тони Спрингер и другие, см., в частности, [7, 13, 14, 5, 4, 6, 12] и содержащиеся там ссылки. Обычно при этом предполагают, что $2 \in R^*$ — а иногда даже $6 \in R^*$.

В этой статье мы опишем все четырехлинейные формы, которые стабилизируются группой Шевалле $G(\mathrm{E}_7, R)$ типа E_7 над произвольным коммутативным кольцом R. Для этого мы построим четырехлинейную *несимметричную* форму на модуле $V(\varpi_7)$ без ограничений на характеристику основного кольца R. Биквадратная форма, ассоциированная с ее симметризацией, совпадает (с точностью до множителя) с формой, построенной Картаном, в случае поля характеристики, отличной от 2 (см. обсуждение в [15, 4, 8, 9]).

Мы не будем напоминать определения, относящиеся к группам Шевалле, модулям Вейля, выбору базиса и т. д. Все это можно найти, например, в [2]. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа E_8, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\}$ — простые корни, ρ — старший корень E_8. Коэффициент при простом корне α_8 в разложении корней из E_8 по базису простых корней (α_8-*высота корня*) может принимать значения $-2, -1, 0, 1, 2$. Этот факт определяет $\mathbb{Z}_5$-градуировку на $\mathfrak{g}$:

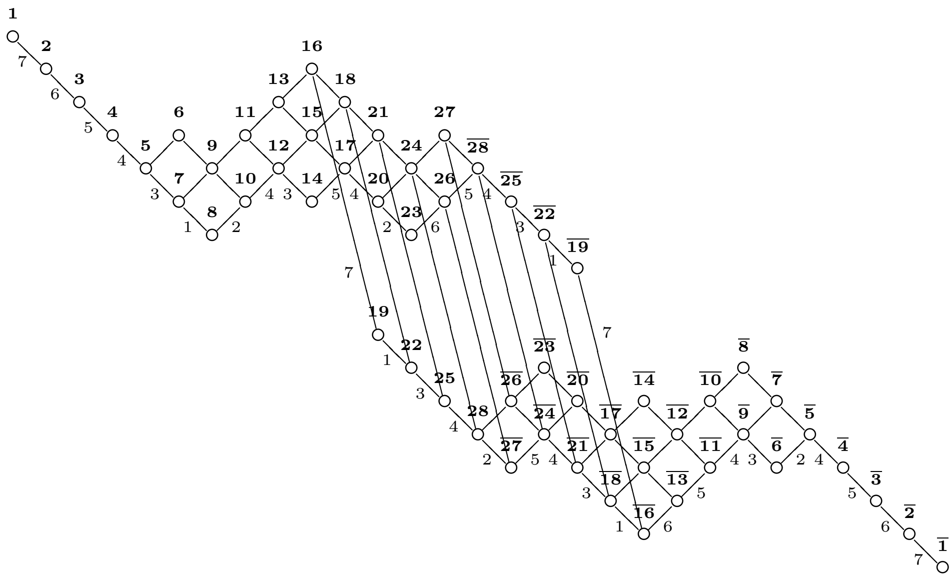
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

А именно, подпространство $\mathfrak{g}$, натянутое на e_α, попадает в $\mathfrak{g}_i$, если коээфициент α при α_8 равен i. Кроме того, $\mathfrak{g}_0$ содержит подалгебру Картана $\mathfrak{h}$.

Заметим, что $\mathfrak{g}_0$ является прямой суммой алгебры Ли типа E_7 и одномерного абелевого пространства, лежащего в подалгебре Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, мы имеем присоединенное действие алгебры Ли типа E_7 на подпространство $\mathfrak{g}_1$ и, следовательно, действие группы $G(\mathrm{E}_7, R)$ на $\mathfrak{g}_1$. Это действие совпадает с рассматриваемым в [2] действием $G(\mathrm{E}_7, R)$ на внутреннем модуле Шевалле $V(\varpi_7)$. В частности, 56-мерное пространство $\mathfrak{g}_1$ обладает базисом из элементарных корневых элементов e_α, где α пробегает корни α_8-высоты 1, то есть, веса представления $V(\varpi_7)$. В дальнейшем мы отождествляем $\mathfrak{g}_1$ с $V(\varpi_7)$. Систему корней E_7 мы рассматриваем как подмножество корней в E_8 с нулевым коэффициентом при простом корне α_8. Кроме того, пространства $\mathfrak{g}_{-2}$ и $\mathfrak{g}_2$ одномерны и натянуты на $e_{-\rho}$ и e_ρ соответственно, где ρ — максимальный корень E_8.

Обозначим через Λ множество весов представления $V(\varpi_7)$. В дальнейшем мы активно пользуемся тем фактом, что элементы Λ можно рассматривать как корни E_8. Многие наши вычисления опираются на структуру *весовой диаграммы* нашего представления. Мы фиксируем нумерацию весов (см. рисунок); в

Автор начинал эту работу в рамках программы DAAD «Михаил Ломоносов» и пользовался поддержкой грантов РФФИ 09-01-00784, РФФИ 09-01-00878, РФФИ 09-01-90304, РФФИ 10-0190016, РФФИ 10-01-00551 и Golda Meir Postdoctoral Fellowship.



работе [2] она называлась *естественной нумерацией.* Отметим, что весовая диаграмма $V(\varpi_7)$ *симметрична* — мы называем симметричными веса, дающие в сумме ρ. Эта симметрия отражена в нумерации: номера симметричных весов противоположны. Вместо $-n$ нам удобнее писать $\overline{n}$.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda$. Рассмотрим элемент $[[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_\beta], e_\gamma], e_\delta]$. Корень $-\rho$ имеет α_8-высоту -2, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — α_8-высоту 1. Значит, полученный элемент лежит в $\mathfrak{g}_2$ и пропорционален e_ρ. Определим $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ равенством

$$[[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_\beta], e_\gamma], e_\delta] = c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) e_\rho.$$

Нетрудно видеть, что $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Z}$. Для всех остальных четверок весов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ положим $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$. Набор коэффициентов $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ определяет четырехлинейную форму q на $V(\varpi_7)$: положим

$$q(u, v, w, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda} c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) u^\alpha v^\beta w^\gamma z^\delta.$$

Рассмотрев разложения векторов u, v, w, z по базису e_α, получаем, что

$$[[[[e_{-\rho}, u], v], w], z] = q(u, v, w, z) e_\rho. \tag{1}$$

Заметим, что если четверка весов $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ такова, что $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$, то $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\rho$. Если среди весов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ есть симметричные, назовем такую четверку **вырожденной**. В противном случае будем называть четверку весов с суммой 2ρ **невырожденной**. Вырожденные и невырожденные четверки вместе дают все четверки с суммой весов 2ρ; их мы будем называть **значительными**. Наконец, четверки с суммой весов, отличной от 2ρ, назовем **незначительными**.

Введем еще один инвариант на V — билинейную симплектическую форму. Для двух весов $\alpha, \beta \in \Lambda$ рассмотрим коммутатор $[e_\alpha, e_\beta]$. Поскольку среди весов Λ нет противоположных, это коммутатор равен $N(\alpha, \beta)$, если $\alpha + \beta$ является корнем, и 0 во всех остальных случаях (см. [16]). Но α, β — корни α_8-высоты 1, поэтому их сумма является корнем только в случае $\beta = \rho - \alpha$, то есть α, β — противоположные веса на весовой диаграмме $V(\varpi_7)$. При этом $N(\alpha, \rho - \alpha) = N(-\rho, \alpha)$. Положим $c'(\alpha, \beta) = N(\alpha, \beta)$ в случае $\alpha + \beta = \rho$ и $c'(\alpha, \beta) = 0$ для всех остальных пар весов (α, β). Набор коэффициентов $c'(\alpha, \beta)$ определяет билинейную форму h на V:

$$h(u,v) = \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} c'(\alpha,\beta)u^{\alpha}v^{\beta}.$$

В бескоординатной записи эта форма задается равенством

$$[u,v] = h(u,v)e_{\rho}.$$

В этом нетрудно убедиться, разложив u, v по базису e_α. Заметим, что если $\alpha+\beta=\rho$, то $c'(\alpha,\beta) = N(\alpha,\beta) = -N(\beta,\alpha) = -c'(\beta,\alpha)$, поэтому форма h симплектична.

Теорема 1. *Формы q и h инвариантны относительно действия $G(\mathrm{E}_7,R)$ на модуле $V = V(\varpi_7)$. Иными словами,*

$$q(u,v,w,z) = q(gu,gv,gw,gz), \quad h(u,v) = h(gu,gv)$$

для всех $u,v,w,z \in V$, $g \in G(\mathrm{E}_7,R)$.

Доказательство. Выберем произвольные $g \in G(\mathrm{E}_7,R)$, $u,v,w,z \in V$ и применим g к обеим частям равенства 1:

$$[[[[ge_{-\rho},gu],gv],gw],gz] = q(u,v,w,z)ge_{\rho},$$

С другой стороны, подставляя в то же равенство векторы gu,gv,gw,gz вместо u,v,w,z соответственно, получаем, что

$$[[[[e_{-\rho},gu],gv],gw],gz] = q(gu,gv,gw,gz)e_{\rho}.$$

Сравнивая последние два равенства с учетом того, что $ge_{-\rho} = e_{-\rho}$ и $ge_\rho = e_\rho$, получаем $q(u,v,w,z) = q(gu,gv,gw,gz)$, что и означает инвариантность q. Для билинейной формы h доказательство совершенно аналогично. □

Это означает, что у нас есть следующий запас инвариантных четырехлинейных форм на V: $q(u,v,w,z)$, $h(u,v)h(w,z)$, $h(u,w)h(v,z)$, $h(u,z)h(v,w)$ и все их линейные комбинации с коэффициентами из R. Следующая теорема утверждает, что других инвариантных четырехлинейных форм на V нет.

Теорема 2. *Пусть F — четырехлинейная форма на V, инвариантная относительно действия $E(\mathrm{E}_7,R)$; то есть, отображение $F\colon V\times V\times V\times V \to R$ такое, что*

$$F(gu,gv,gw,gz) = F(u,v,w,z)$$

для всех $u,v,w,z \in V$ и $g \in E(\mathrm{E}_7,R)$. Тогда существуют $c_1,c_2,c_3,c_4 \in R$ такие, что

$$F(u,v,w,z) = c_1q(u,v,w,z) + c_2h(u,v)h(w,z) + c_3h(u,w)h(v,z) + c_4h(u,z)h(v,w)$$

для всех $u,v,w,z \in V$.

Аналогичная теорема для алгебр Ли была независимо доказана в [10].

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 2 Обозначим фигурирующие в формулировки теоремы четырехлинейные формы:

$$h_{12}(u,v,w,z) = h(u,v)h(w,z),$$
$$h_{13}(u,v,w,z) = h(u,w)h(v,z),$$
$$h_{14}(u,v,w,z) = h(u,z)h(v,w).$$

Из описания форм h и q сразу следует, что для незначительной четверки $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ значение любой линейной комбинации форм $q, h_{12}, h_{13}, h_{14}$ на четверке векторов $(e_\alpha,e_\beta,e_\gamma,e_\delta)$ равно 0.

Обозначим через Σ^+ множество корней в E_7 с коэффициентом 1 при α_7. Пусть $\varphi \in \mathrm{E}_7$. Обозначим $R_\varphi = \{\alpha \in \Lambda \mid \alpha+\varphi \in \Lambda\}$ — множество «правых концов» всех ребер весового графа, помеченных корнем φ. Эти множества легко извлечь из таблиц работы [2]; например, это в точности номера столбцов ненулевых матричных элементов в корневых элементах e_φ.

Лемма 1. *Пусть $\beta, \gamma \in \Lambda \setminus \{\rho - \omega\}$. Тогда найдется $\varphi \in \Sigma^+ \setminus \{\alpha_7\}$ такой, что $\beta + \varphi \notin \Lambda$ и $\gamma + \varphi \notin \Lambda$.*

Доказательство. Предположим, что такого φ не нашлось; то есть, для всякого $\varphi \in \Sigma^+ \setminus \{\alpha_7\}$ хотя бы одна из двух сумм $\beta + \varphi$, $\gamma + \varphi$ лежит в Λ, то есть. хотя бы один из весов β, γ лежит в R_φ. Посмотрим на некоторые значения R_φ:

$$\begin{aligned}
R_{\substack{0000110\\0}} &= \{3, 19, 22, 25, 28, \overline{27}, \overline{23}, \overline{20}, \overline{17}, \overline{15}, \overline{13}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{0111110\\0}} &= \{7, 19, 25, 28, \overline{26}, \overline{23}, \overline{18}, \overline{15}, \overline{12}, \overline{10}, \overline{6}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1122110\\1}} &= \{15, 22, \overline{26}, \overline{24}, \overline{21}, \overline{16}, \overline{14}, \overline{11}, \overline{9}, \overline{7}, \overline{3}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1232210\\2}} &= \{26, \overline{27}, \overline{20}, \overline{17}, \overline{15}, \overline{13}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1343210\\2}} &= \{\overline{22}, \overline{18}, \overline{15}, \overline{12}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}
\end{aligned}$$

Один из весов β, γ обязан лежать хотя бы в трех из этих пяти подмножеств; но нетрудно видеть, что пересечение любых трех из них равно либо $\{\overline{1}\}$, либо $\{\overline{1}, \overline{15}\}$. По условию это не может быть $\overline{1}$, поэтому $\beta = \overline{15}$ или $\gamma = \overline{15}$. Пусть, скажем, $\beta = \overline{15}$. Посмотрим теперь на подмножества

$$\begin{aligned}
R_{\substack{0001110\\0}} &= \{4, 19, 22, 25, \overline{26}, \overline{24}, \overline{23}, \overline{20}, \overline{14}, \overline{12}, \overline{11}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1111110\\1}} &= \{10, 22, 25, \overline{27}, \overline{24}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{11}, \overline{7}, \overline{5}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1122110\\1}} &= \{15, 22, \overline{26}, \overline{24}, \overline{21}, \overline{16}, \overline{14}, \overline{11}, \overline{9}, \overline{7}, \overline{3}, \overline{1}\},\\
R_{\substack{1243210\\2}} &= \{\overline{25}, \overline{21}, \overline{17}, \overline{14}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}.
\end{aligned}$$

Ни одно из них не содержит $\overline{15}$, поэтому γ должно лежать в каждом из них, но их пересечение равно $\{\overline{1}\}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \mathrm{E}_7$ и $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \Lambda$ — такие веса, что $\alpha' - \varphi \in \Lambda$. $\beta' + \varphi \notin \Lambda$, $\gamma' + \varphi \notin \Lambda$, $\delta' + \varphi \notin \Lambda$. Тогда $F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = 0$ для любой перестановки $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ четверки $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.*

Доказательство. Достаточно доказывать утверждение для тождественной перестановки, перейдя при необходимости к другой инвариантной форме F. Возьмем $\xi \in R$. Тогда

$$\begin{aligned}
F(e_{\alpha-\varphi}, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) &= F(x_\varphi(\xi)e_{\alpha-\varphi}, x_\varphi(\xi)e_\beta, x_\varphi(\xi)e_\gamma, x_\varphi(\xi)e_\delta)\\
&= F(e_{\alpha-\varphi} \pm \xi e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta)\\
&= F(e_{\alpha-\varphi}, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) \pm \xi F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta).
\end{aligned}$$

После подстановки $\xi = 1$ получаем $F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = 0$, что и требовалось. □

Лемма 3. *Если F такая, как в формулировке теоремы, то $F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = 0$ для любой незначительной четверки $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если $F(e_\alpha, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) \neq 0$, то $\beta = \gamma = \rho - \alpha$. Группа $W(\mathrm{E}_7)$ транзитивно действует на множестве весов Λ, поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha = \omega$ — старший вес. Предположим сначала, что ни β, ни γ не равны $\rho - \omega$. По лемме 1 найдется такой $\varphi \in \Sigma^+ \setminus \{\alpha_7\}$, что

$\beta+\varphi \notin \Lambda$ и $\gamma+\varphi \notin \Lambda$. Кроме того, очевидно, $\omega-\varphi \in \Lambda$ и $\omega+\varphi \notin \Lambda$. По лемме 2 для четверки весов $(\omega, \omega, \beta, \gamma)$ и корня φ получаем, что $F(e_\omega, e_\omega, e_\beta, e_\gamma) = 0$.

Теперь перейдем к случаю $\beta = \rho - \omega$ или $\gamma = \rho - \omega$. Для определенности рассмотрим первый из этих вариантов. Нам нужно доказать, что если $F(e_\omega, e_\omega, e_{\rho-\omega}, e_\gamma) = 0$, то $\gamma = \rho - \omega$. Пусть для начала $\gamma \neq \omega$ и $\gamma \neq \rho - \omega$. Тогда найдется корень $\varphi \in \mathrm{E}_7$, коэффициент которого при α_7 равен 0, для которого $\gamma - \varphi \in \Lambda$. Действительно, после удаления ребер, помеченных 7, весовая диаграмма распадается на 4 куска, и по нашему предположению γ лежит в куске из 27 вершин. По лемме 2 для четверки весов $(\gamma, \omega, \omega, \rho - \omega)$ и корня φ получаем $F(e_\omega, e_\omega, e_{\rho-\omega}, e_\gamma) = 0$, что и требовалось.

Осталось рассмотреть случай $\beta = \rho - \omega$, $\gamma = \omega$. Но тогда можно применить лемму 2 к четверке $(\rho-\omega, \omega, o, \gamma)$ и корню α_7, и получить $F(e_\omega, e_\omega, e_{\rho-\omega}, e_\gamma) = 0$.

С помощью перестановки аргументов формы получаем, что мы доказали следующий факт: если $F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = 0$ и хотя бы два из корней $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ совпадают, то их ровно два, и оставшиеся два им симметричны. В этом случае, очевидно, четверка $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ является значительной.

Теперь рассмотрим случай, когда среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ есть два симметричных веса и $F(\varepsilon_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) \neq 0$. Нужно доказать, что другие два тоже симметричны. Давайте считать, что $\beta = \rho - \alpha$. Как и выше, можно подействовать элементом группы Вейля $W(\mathrm{E}_7)$ и считать, что $\alpha = \omega$. Более того, можно считать, что разность $\alpha - \gamma$ является корнем (то есть, расстояние между α и γ равно 1; иначе, разность $\beta - \gamma$ является корнем, и можно поменять местами α и β. После этого можно подействовать элементом группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ и считать, что $\gamma = \omega - \alpha_7$ ($W(\mathrm{E}_6)$ оставляет α и β на местах и транзитивно переставляет веса на расстоянии 1 от ω). Итак, мы пришли к четверке $(\omega, \rho - \omega, \omega - \alpha_7, \delta)$. Попытаемся найти корень $\varphi \in \mathrm{E}_7$, для которого $\omega + \varphi$, $\rho - \omega + \varphi$, $\omega - \alpha_7 + \varphi$ не являются весами, а $\delta - \varphi$ — является. Если такой корень найдется, то можно применить лемму 2 к весам $(\delta, \omega, \rho-\omega, \omega-\alpha_7)$ и корню φ, что даст нам $F(e_\omega, e_{\rho-\omega}, e_{\omega-\alpha_7}, e_\delta) = 0$. Легко добиться $\omega+\varphi \notin \Lambda$ и $\rho-\omega+\varphi \notin \Lambda$; достаточно выбирать корни с нулевым коэффициентом при α_7. Остались условия $\omega - \alpha_7 + \varphi \notin \Lambda$ и $\delta - \varphi \in \Lambda$. Если выбирать φ положительным, то первое условие будет выполнено автоматически. Легко видеть, что так можно сделать всегда, кроме того случая, когда от δ некуда «двигаться вправо», то есть, $\delta = \overline{19}$ или $\delta = \overline{2}$. (напоминаем, что мы уже исключили случай равенства двух весов из $\alpha, \beta, \gamma, \delta$). Но в случае $\delta = \overline{19}$ подходит $\varphi = -\alpha_1$. Стало быть, остается только $\delta = \overline{2}$, то есть, γ и δ симметричны, что нам и нужно.

Теперь мы можем считать, что среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ нет ни одинаковых, ни симметричных весов. Любые два веса, стало быть, образуют угол $\pi/3$ или $\pi/2$. Предположим, что какие-то два из них образуют угол $\pi/3$, то есть, находятся на расстоянии 1. После действия группы Вейля и перестановки аргументов, как выше, можно считать, что $\alpha = \omega$, $\delta = \omega - \alpha_7$. По лемме 1 найдется $\varphi \in \Sigma^+ \setminus \{\alpha_7\}$ такой, что $\beta + \varphi \notin \Lambda$ и $\gamma + \varphi \notin \Lambda$. Очевидно, при этом $\omega - \varphi \in \Lambda$ и $\omega - \alpha_7 + \varphi \notin \Lambda$. Теперь можно применить лемму 2 к четверке $(\omega, \beta, \gamma, \omega - \alpha_7)$ и корню φ, откуда $F(e_\omega, e_\beta, e_\gamma, e_{\omega-\alpha_7}) = 0$.

Остается только случай, когда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ попарно ортогональны, но из этого немедленно следует, что они образуют значительную четверку (см., например, [11, Corollary 1.4]). □

Доказательство теоремы. Выберем фиксированную невырожденную четверку весов, скажем, $(1, \overline{2}, 19, \overline{16})$. Непосредственное вычисление показывает, что $q(e_1, e_{\overline{2}}, e_{19}, e_{\overline{16}}) = 1$. Положим $c_1 = F(e_1, e_{\overline{2}}, e_{19}, e_{\overline{16}})$ и заменим форму F на

$F - c_1 q$; получим форму, удовлетворяющую условию теоремы, значение которой на четверке $(e_1, e_{\overline{2}}, e_{19}, e_{\overline{16}})$ равно 0. Докажем, что она является линейной комбинацией форм h_{12}, h_{13} и h_{14}.

Сначала покажем, что если четверка весов $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ невырожденная, то $F(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta) = 0$. Мы знаем, что F принимает значение 0 для одной невырожденной четверки, и очевидно, что равенство 0 сохраняется при действии группы Вейля E_7. Покажем, что любую невырожденную четверку можно перевести в нашу. Действительно, группа Вейля транзитивно действует на Λ, поэтому первый элемент четверки можно перевести в старший вес (с номером 1). Оставшиеся три веса ортогональны ему, поэтому находятся среди 27 весов на расстоянии 2 от старшего веса. Но эти веса образуют весовую диаграмму 27-мерного представления E_6, причем ограничение действия группы $W(\mathrm{E}_7)$ на подгруппу $W(\mathrm{E}_6)$ на этой диаграмме совпадает со стандартным действием $W(\mathrm{E}_6)$ на весах минимального представления. Более того, поскольку эти три веса попарно ортогональны, они образуют **триаду**, и хорошо известно, что множество триад образует одну орбиту под действием $W(\mathrm{E}_6)$ (см., например, [3, 1]). Поэтому нашу триаду можно перевести в фиксированную $(\overline{2}, \overline{19}, \overline{16})$, не трогая первый вес. Стало быть, $F = 0$ на всех невырожденных четверках.

Положим теперь

$$\begin{aligned} c_2 &= F(e_1, e_{\overline{1}}, e_{\overline{2}}, e_2), \\ c_3 &= F(e_1, e_{\overline{2}}, e_{\overline{1}}, e_2), \\ c_4 &= F(e_1, e_{\overline{2}}, e_2, e_{\overline{2}}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что h_{12}, h_{13}, h_{14} принимают значения 1 или 0 на этих четверках так, что разность $F - c_2 h_{12} - c_3 h_{13} - c_4 h_{14}$ равна 0 на этих трех четверках. Заменим F на эту разность и докажем, что форма F везде равна 0. Мы уже знаем, что F равна 0 на незначительных и на невырожденных четверках.

Прежде всего заметим, что любую вырожденную четверку вида $(1, \overline{1}, \beta, \rho - \beta)$ при $\{\beta, \rho - \beta\} \neq \{1, \overline{1}\}$ можно действием группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ привести к виду $(1, \overline{1}, \overline{2}, 2)$ или к виду $(1, \overline{1}, 16, \overline{16})$. Действительно, $W(\mathrm{E}_6)$ транзитивно действует на кусках, получающихся из весовой диаграммы удалением ребер, помеченных 7, и веса $\beta, \rho - \beta$ оказываются в двух разных кусках размером по 27 весов. Но для $\xi \in R$ и $\varphi = \substack{2343210 \\ 2}$ имеем

$$\begin{aligned} F(e_1, e_{\overline{1}}, e_{\overline{2}}, e_{\overline{16}}) &= F(x_\varphi(\xi) e_1, x_\varphi(\xi) e_{\overline{1}}, x_\varphi(\xi) e_{\overline{2}}, x_\varphi(\xi) e_{\overline{16}}) \\ &= F(e_1, e_{\overline{1}} + \xi e_{19}, e_{\overline{2}} + \xi e_{16}, e_{\overline{16}} + \xi e_2) + \xi F(e_1, e_{19}, e_{\overline{2}}, e_{\overline{16}}) \\ &\quad + \xi F(e_1, e_{\overline{1}}, e_{16}, e_{\overline{16}}) + \xi F(e_1, e_{\overline{1}}, e_{\overline{2}}, e_2) + \dots \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались тем фактом, что φ — максимальный корень E_7 и все знаки действия для $x_\varphi(\xi)$, таким образом, положительны. Дальнейшие слагаемые отвечают незначительным четверкам и поэтому равны 0. Кроме того, последнее выписанное слагаемое в правой части равно 0 по условию, а $F(e_1, e_{19}, e_{\overline{2}}, e_{\overline{16}}) = 0$, поскольку отвечает невырожденной четверке. Поэтому $F(e_1, e_{\overline{1}}, e_{16}, e_{\overline{16}}) = 0$. Мы получили, что любая четверка весов вида $(1, \overline{1}, \beta, \rho - \beta)$ с $\{\beta, \rho - \beta\} \neq \{1, \overline{1}\}$. приводится к одной из двух четверок с нулевым значением формы. Значит, F равно нулю на всех четверках такого вида. Переставляя аргументы в этом рассуждении получаем, что значение F на четверках вида $(1, \beta, \overline{1}, \rho - \beta)$ и $(1, \beta, \rho - \beta, \overline{1})$ также равно 0. Но любая вырожденная четверка без повторяющихся весов приводится к такой действием группы Вейля: достаточно первый вес перевести в старший.

Осталось рассмотреть вырожденные четверки с повторяющимися весами. Возьмем любой вес $\alpha \in \Lambda$. Очевидно, что найдется простой или отрицательный простой корень φ такой, что $\alpha - \varphi$ является весом. Тогда все знаки действия для $x_\varphi(\xi)$ равны 1 и, значит,

$$\begin{aligned}
&F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha}, e_{\alpha-\varphi}, e_{\rho-\alpha}) \\
&= F(x_\varphi(\xi)e_\alpha, x_\varphi(\xi)e_{\rho-\alpha}, x_\varphi(\xi)e_{\alpha-\varphi}, x_\varphi(\xi)e_{\rho-\alpha}) \\
&= F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha} + \xi e_{\rho-\alpha+\varphi}, e_{\alpha-\varphi} + \xi e_\alpha, e_{\rho-\alpha} + \xi e_{\rho-\alpha+\varphi}) \\
&= F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha}, e_{\alpha-\varphi}, e_{\rho-\alpha}) + \xi F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha+\varphi}, e_{\alpha-\varphi}, e_{\rho-\alpha}) \\
&+ \xi F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha}, e_\alpha, e_{\rho-\alpha}) + \xi F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha}, e_{\alpha-\varphi}, e_{\rho-\alpha+\varphi}) + \dots
\end{aligned}$$

Остальные слагаемые равны 0. Второе и четвертое слагаемое в правой части также равны 0, поскольку отвечают вырожденным четверкам без повторяющихся весов. Значит, $F(e_\alpha, e_{\rho-\alpha}, e_\alpha, e_{\rho-\alpha}) = 0$. Повторяя это рассуждение с различными перестановками аргументов, получаем, что значение F и на всех вырожденных четверках с повторяющимися весами равно нулю. Поэтому F везде равна 0, и теорема доказана. □

Список литературы

[1] Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6, Алгебра и Анализ **19** (2007), № 5, 35–62.

[2] Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Группа Шевалле типа* E_7 *в* 56*-мерном представлении*, Зап. научн. сем. ПОМИ (2010).

[3] Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в* 27*-мерном представлении*, Зап. научн. сем. ПОМИ **338** (2006), 5–68.

[4] M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups*, Geom. Dedicata **25** (1988), no. 1-3, 417–465.

[5] R. B. Brown, *Groups of type* E_7, J. reine angew. math. **236** (1969), 79–102.

[6] B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7*. I. A four form for* E_7, J. Algebra **173** (1995), no. 2, 361–389.

[7] H. Freudenthal, *Sur le groupe exceptionnel* E_7, Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **56** (1953), 81–89.

[8] R. S. Garibaldi, *Groups of type* E_7 *over arbitrary fields*, Comm. Algebra **29** (2001), no. 6, 2689–2710.

[9] F. Helenius, *Freudenthal triple systems by root system methods*, arXiv/1005.1275, 2010.

[10] J. Lurie, *On simply laced Lie algebras and their minuscule representations*, Commentarii mathematici Helvetici **76** (2001), no. 3, 515–575.

[11] G. E. Röhrle, *On extraspecial parabolic subgroups*, Contemp. Math. **153** (1993), 143–155.

[12] T. A. Springer, *Some groups of type* E_7, Nagoya Math. J. **182** (2006), 259–284.

[13] J. Tits, *Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **39** (1953), 309–329.

[14] J. Tits, *Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels* E_6 *et* E_7, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **40** (1954), 29–40.

[15] N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.

[16] N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type* E_l, Зап. научн. сем. ПОМИ **281** (2001), 60–104.

Санкт-Петербургский государственный университет

Current address: Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem

E-mail address: `mahalex@yandex.ru`