Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Klausurübungen

Aufgabe 1
Definieren Sie die Begriffe Grenzwert einer Folge, Häufungspunkt einer Folge und Cauchy-Folge. Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Beweisen Sie außerdem, dass jede reelle Cauchy-Folge genau einen Häufungspunkt hat.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie (sofern existent) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ (mit Begründung!):

(a) $a_n = \frac{-n^2-n-1}{4n^2+9}$.

(b) $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

(c) $a_n = \sqrt{n^2+1}$.

(d) $a_n = \frac{n^2-2^n}{n^3+2^n}$.

(e) $a_n = (\frac{n}{n+1})^{n+1}$.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^{n^3}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-1/n)^{n^2}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(n)}{(2e)^n}$, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{|x^3|}$, stetig ist. In welchen Punkten ist f differenzierbar? Ist f sogar stetig differenzierbar? Ist f zweimal differenzierbar?

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die Funktion $\tan\colon (-\pi/2,+\pi/2)\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist mit Bild $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie (sofern existent) auch die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan\colon\ \mathbb{R}\to(-\pi/2,+\pi/2)$.

Aufgabe 6
Entscheiden Sie, ob die Funktion $f(x)=\ln(x+\sqrt{1-x^2})$ auf dem Definitionsbereich $D=[0,1]$ gleichmäßig stetig ist (mit Begründung!).