Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 3

Aufgabe 1
Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für beliebige $x, y \in K$ gilt:

$$x < y < 0 \implies y^{-1} < x^{-1} < 0\,.$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}\,.$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2n-1}{n} < 2\,.$$

Aufgabe 4
Geben Sie die formale Bedingung dafür an, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) nicht gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) divergent ist.

Aufgabe 5
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 6
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = n/(n+1)$.

(b) $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $(n \geq 1)$.

(c) $c_n = 1/n^2$ $(n \geq 1)$.