Universität Bielefeld
C. Huck

Sommersemester 2017

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 8

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ als Häufungspunktmenge das gesamte abgeschlossene Intervall $[0,1]$ hat.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\})$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\}).$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Häufungspunktmenge A gilt:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff A = \varnothing \iff \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,.$$

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty \iff A = \varnothing \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,.$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Hinweis. Verwenden Sie, dass jedes Polynom n-ten Grades höchstens n reelle Nullstellen hat (also insbesondere endlich viele). Zeigen Sie zuerst, dass die Menge der Polynome n-ten Grades ($n \geq 1$) mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.

Aufgabe 5
Beweisen Sie die Stetigkeit der Quadratwurzelfunktion $\mathrm{sqrt}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.