Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 6

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n = (2 - (-1)^{n+1})\frac{4n^2 + 3n + 1}{n^2 + 7n + 4}$$

(b) Bestimmen Sie eine Folge so, dass $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ die Menge ihrer Häufungspunkte ist. Könnte man die Null auch weglassen?

(1+2 Punkte)

Aufgabe 2

Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Betrachten Sie die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie zuerst, dass diese monoton und beschränkt sind. Berechnen Sie die Limites der beiden Teilfolgen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Hinweis. Hier ist e die Eulersche Zahl, also der Limes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren/absolut konvergieren bzw. divergieren.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-4n+5}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 02.06.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128