Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 9

Aufgabe 1
Untersuchen Sie, ob die folgenden Limites existieren bzw. ob bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$ vorliegt:

(a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{|x|}{x^2}$.

(b) $\lim_{\substack{x\to -2\\ x\neq -2}} \frac{x^7+x+2}{x+2}$.

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x^2}$.

(d) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{\exp(2x)-1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)$.

(e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$.

(f) $\lim_{x\to 0} xf(x)$, wobei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion sei, also $|f(x)|\leq K$ für alle $x\in\mathbb{R}$, wobei $K\geq 0$ eine Konstante ist.

Hinweis. Teil (d): Satz über die Abschätzung des Restglieds mit $N=2$.

(1+1+1+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 2
Betrachten Sie die *Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben sei durch

$$f_n(x) := \frac{3nx}{1+2|nx|}\,.$$

Zeigen Sie, dass sämtliche f_n stetig sind, der *punktweise Limes* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,$$

zwar wohldefiniert (die obigen Limites existieren) aber nicht stetig ist.

Hinweis. Unterscheiden Sie für die Stetigkeit der f_n die Fälle $x=0$ und $x\neq 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen, offen, beschränkt bzw. kompakt sind.

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$.

(b) Die Menge der reellen Zahlen $x \in [0, 1]$, die eine Dezimaldarstellung ohne die Ziffer 5 haben.

Hinweis. Teil (b): Beachten Sie die Uneindeutigkeiten der Dezimaldarstellung, z.B. gehört $0,4\overline{9} = 0,5$ zu der betrachteten Menge.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 23.06.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128