Universität Bielefeld **Sommersemester 2017**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Blatt 13 (letztes Übungsblatt für die Wertung)

Aufgabe 1 (Fortsetzung von Aufgabe 4, Blatt 12)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , \text{ falls } x \neq 0; \\ 0 & , \text{ falls } x = 0, \end{cases}$$

in jedem Punkt differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Zeigen Sie, dass f' nicht stetig im Nullpunkt ist.

Hinweis. In Aufgabe 4 von Blatt 12 wurde gezeigt, dass $f'(0) = 0$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^x$.

(b) $f(x) = x^{(x^x)}$.

(c) $f(x) = (x^x)^x$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen sinh, cosh und $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$ sowie die Ableitung (sofern existent) der Umkehrfunktionen $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Arcosh}\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$. Ist Arcosh im Punkt 1 differenzierbar?

(b) Zeigen Sie, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(-1, +1)$ abbildet. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion

$$\operatorname{Artanh}\colon (-1, +1) \to \mathbb{R}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(c) Skizzieren Sie die Funktionen und Area-Funktionen aus (a) und (b).

Hinweis. Siehe auch Aufgabe 1 auf Präsenzübungsblatt 10 und Aufgabe 2 auf Übungsblatt 10.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe)

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $f'(a) \leq f'(b)$ sowie $c \in [f'(a), f'(b)]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f'(\xi) = c$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbare Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$, sodass f' unbeschränkt ist.

Hinweis. Teil (a): Betrachten Sie zunächst den Fall $c = 0$ und (ohne Einschränkung) $f'(a) < 0 < f'(b)$. Vorsicht: Die Funktion f ist hier lediglich differenzierbar und nicht etwa stetig differenzierbar (dann wäre die Aussage klar nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)!

(5+3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 21.07.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128