Universität Bielefeld
C. Huck **Sommersemester 2018**

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I
Blatt 10

Aufgabe 1
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie: Es existieren eine natürliche Zahl N sowie Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_N \in K$ nicht alle gleich Null mit

$$a_0 f^0 + a_1 f^1 + \cdots + a_N f^N = 0\,.$$

Hinweis. Hier ist auf der rechten Seite natürlich der Nullendomorphismus gemeint. Ist der K-Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ der Endomorphismen von V hier endlich-dimensional?

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ und } s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis (c_1, c_2) von $\mathbb{R}^2$ so, dass A als lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. der Basen (s_1, s_2) von $V = \mathbb{R}^2$ und (c_1, c_2) von $W = \mathbb{R}^2$ die Koordinatenmatrix $\mathbb{1}_2$ (die 2×2-Einheitsmatrix) besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $B = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{R}^2$ so, dass A bzgl. der Basen (b_1, b_2) von $V = \mathbb{R}^2$ und (s_1, s_2) von $W = \mathbb{R}^2$ ebenfalls die Koordinatenmatrix $\mathbb{1}_2$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Basis $B = (b_1, b_2)$ von $V = W = \mathbb{R}^2$ gibt, sodass A bzgl. dieser Basis die Koordinatenmatrix $\mathbb{1}_2$ besitzt.

Hinweis. Teil (c): Welche Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ erfüllen die Gleichung $A(v) = v$?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ wird definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}\colon M_n(K) \to K$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_n(K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern(Spur) und Bild(Spur).

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie die Koordinatenmatrix des Endomorphismus

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ bzgl. B.

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 21.06.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128