Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 13 (Letztes Übungsblatt)

Aufgabe 1
Für $n \geq 1$ und $a_1, \ldots, a_n \in K$ sei

$$A = \begin{pmatrix} * & & & a_n \\ & & \iddots & \\ & a_2 & & 0 \\ a_1 & & & \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt $\det(A) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Hinweis. Vollständige Induktion und z.B. Entwicklung nach der letzten Spalte.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Für $n \geq 2$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt $\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Hinweis. Vollständige Induktion.

(5 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt

$$SL_n(K) = \{S \in GL_n(K) \mid \det(S) = 1\}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4
Für $n \geq 2$ und $A \in M_n(K)$ bezeichne $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ für $A \in GL_n(K)$.

(b) $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ für $A, B \in GL_n(K)$.

(c) Für $\operatorname{Rang}(\tilde{A}A)$ gibt es nur die Möglichkeiten 0 oder n.

Hinweis. Teile (a) und (b): Verwenden Sie $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ für invertierbare Matrizen A.

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)
Sei $n \geq 1$ und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei weiter f ein Endomorphismus von V mit $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\det(f)$ und $\det(id_V + f)$.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 5 von Übungsblatt 12.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 12.07.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128