Universität Bielefeld **Sommersemester 2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra I

Blatt 15 (Ohne Wertung)

Aufgabe 1
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 1 & c^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ für festes $c \in \mathbb{Q}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ für feste $a, b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 6 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})\,.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ein $S \in GL_3(\mathbb{Q})$, sodass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie sieht D explizit aus?

Aufgabe 3
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})\,.$$

(a) Bestimmen Sie ein $S \in GL_2(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Formel für A^n, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Teil (b): Zeigen Sie zunächst, dass gilt $A^n = SD^nS^{-1}$.

Aufgabe 4
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ *idempotent*, d.h. es gilt $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

Hinweis. Aus Aufgabe 3 auf Blatt 14 wissen wir bereits, dass f nur die Eigenwerte 0 oder 1 haben kann. Zeigen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass V immer die (direkte) Summe der zwei möglichen Eigenräume ist, d.h.

$$V \;=\; \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f - id_V)\,.$$

Es ist dabei natürlich möglich, dass ein Summand der Nullraum ist und f nur einen Eigenwert hat (z.B. hat $f = 0$ nur den Eigenwert 0 bzw. hat $f = id_V$ nur den Eigenwert 1). Zeigen Sie, dass gilt $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathrm{Kern}(f - id_V)$.