Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass sich Riemann-Integrierbarkeit der f_n i. Allg. nicht auf den punktweisen Limes f einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überträgt.

Hinweis. Welche nicht Riemann-integrierbaren Funktionen kennen Sie? Können Sie eine davon als punktweisen Limes von integrierbaren Funktionen darstellen?

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ bezüglich

$$d(v,w) := \|v-w\|$$

ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) höchstens einen Grenzwert haben.

Hinweis. Beweis wie in $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Werte der Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Hinweis. Gesucht ist hier ein geschlossener Ausdruck in Abhängigkeit von x. Z.B. gilt ja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass für $|x| \leq 1$ gilt

$$\arctan(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots .$$

Aufgabe 6
Seien $f_n \in \mathscr{B}(D,\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ (gegen ein $f \in \mathscr{B}(D,\mathbb{R})$) die absolute, gleichmäßige sowie punktweise Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ nach sich zieht.