Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 5

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 2
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ Berührpunkt von } A\}$.

(b) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x \text{ innerer Punkt von } A\} = \overline{A^c}^{\,c}$.

(c) $\partial A = \{x \in X \mid \text{Jede Umgebung von } x \text{ trifft } A \text{ und } A^c\}$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ gilt:

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)\,.$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen genau dann stetig ist, wenn sie stetig im Nullpunkt 0 ist.

Aufgabe 5
Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $f, g\colon\ X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $\varphi, \psi\colon\ X \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\varphi(x) := \max(f(x), g(x))$$

bzw.

$$\psi(x) := \min(f(x), g(x))\,,$$

stetig sind.

Aufgabe 6
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Limes $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

von X kompakt ist.