Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 8

Aufgabe 1
Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $\mathcal{L}(V, W)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten (äquivalent: stetigen) linearen Abbildungen $f\colon V \to W$, versehen mit der zugehörigen Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, gegeben durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}} := \sup_{\|v\| \leq 1} \|f(v)\| \,.$$

Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und alle $v \in V$ die Ungleichung

$$\|f(v)\| \leq \|f\|_{\mathcal{L}} \cdot \|v\|$$

gilt. Beweisen Sie auch die Identität

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|v\| = 1} \|f(v)\| \,.$$

Aufgabe 2 (Linearität der Ableitung)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in U$ (total) differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g\colon U \to \mathbb{R}^m$ in x_0 (total) differenzierbar ist mit

$$D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0) \,.$$

Aufgabe 3
Beweisen Sie die Produktregel für partiell differenzierbare Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen:

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \,.$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die euklidische Norm $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{f(x)} \,,$$

also $\operatorname{grad} f(x) = \frac{x}{f(x)}$. Ist f auch partiell differenzierbar im Ursprung?

Aufgabe 5 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)
Es sei $p\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Sei weiter $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $u\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass auf der offenen (!) Menge $p^{-1}(U)$ die Gleichung

$$(\Delta u) \circ p \;=\; \frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u \circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(u \circ p)}{\partial \varphi^2}$$

gilt, wobei

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

der *Laplace-Operator* ist, also

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,.$$

Hinweis. Kettenregel und Vertauschungssatz für zweimal stetig partiell differenzierbare Abbildungen.