Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Präsenzübungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 13

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Menge $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 2
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das C^∞-Vektorfeld, gegeben durch $f(x_1,x_2) = (-x_2,x_1)$. Wenden Sie das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an, um die Lösung $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der DGL (bzw. des Differentialgleichungssystems) $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = (1,0)$ zu erhalten.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden skalaren Differentialgleichungen, d.h. die Lösungen durch einen beliebigen Punkt (t_0,x_0) des Definitionsbereiches.

(a) $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$, wobei $|x| < 1$.

(b) $\dot{x} = \frac{t+x}{t+2x}$, wobei $t,x > 0$.

(c) $(1-t^2)\dot{x} - tx + 1 = 0$, wobei $|t| < 1$.

(d) $\dot{x} = (t+x)^2$.

Hinweis. Teil (b): Verwenden Sie (ohne Beweis) die Aussage von Aufgabe 2 auf Übungsblatt 13. Teil (d): Verwenden Sie die Substitution $y = t + x$.