Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Blatt 3

Aufgabe 1
Für $n \geq 1$ sei $f_n \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion 0.

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = 1$.

(c) Ist das nicht im Widerspruch zu §15 Satz 2 aus der Vorlesung?

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 2
Es sei $I = (-a, a)$, wobei $a > 0$. Eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* bzw. *ungerade*, wenn gilt $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in I$. Sei f darstellbar durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, also $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f genau dann gerade (ungerade) ist, wenn $a_n = 0$ für alle ungeraden (geraden) $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. wenn nur gerade (ungerade) Potenzen von x auftreten.

Hinweis. Die a_n sind durch f vollkommen festgelegt.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Arsinh}(x) \;=\; x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + - \cdots \;=\; \sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für alle $|x| < 1$ gilt. Bestimmen Sie auch das Konvergenzverhalten in den Randpunkten $x = \pm 1$ und den Grenzwert (sofern existent).

Hinweis. Berechnen Sie die erste Ableitung des Area sinus hyperbolicus und wenden Sie darauf den allgemeinen Binomischen Lehrsatz an. Verwenden Sie für die Randpunkte den Abelschen Grenzwertsatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 4
Auf dem Vektorraum $C^1[a, b]$ der einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ betrachten wir die sogenannte C^1-Norm, definiert durch

$$\|f\|_{C^1} := \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \mid x \in [a, b]\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $C^1[a,b]$ bzgl. der C^1-Norm vollständig (also ein Banach-Raum) ist.

(b) Zeigen sie, dass $C^1[a,b]$ bzgl. der Supremumsnorm nicht vollständig ist.

Hinweis. Teil (b): Betrachten Sie für $n \geq 1$ die Funktionen $f_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

(3+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 03.11.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128