Universität Bielefeld
C. Huck

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 4

Aufgabe 1
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die offenen Bälle

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}\,,$$

wobei $x \in X$ und $r > 0$, tatsächlich offene Mengen sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $v, w \in V$ gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $\|v - w\| \geq \big|\|v\| - \|w\|\big|$.

(b) Die Norm $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung.

Hinweis. Teil (b): Verwenden Sie Teil (a).

(2+1 Punkte)

Aufgabe 3
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen bzw. offen sind. Bestimmen Sie jeweils Abschluss, Inneres sowie den Rand.

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$.

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$.

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4
Wir versehen den Vektorraum $C^1[a, b]$ der einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der C^1-Norm sowie den Vektorraum $C[a, b]$ der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Normen die Abbildung $D\colon C^1[a, b] \to C[a, b]$, gegeben durch $f \mapsto f'$, $\mathbb{R}$-linear und stetig ist. Bestimmen Sie auch den Kern von D.

Hinweis. Für die Definition der C^1-Norm siehe Übungsblatt 3, Aufgabe 4.

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $\max(x, y) = \max\{x, y\}$.

(b) $\min(x, y) = \min\{x, y\}$.

(c) $\operatorname{add}(x, y) = x + y$.

(d) $\operatorname{mult}(x, y) = x \cdot y$.

(1+1+1+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 10.11.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128