

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann im Abschluss \overline{A} von A liegt, wenn $\text{dist}(A, x) = 0$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2

Wir betrachten die Menge $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ mit } x > y\}$ als metrischen Raum bezüglich der von der Euklidischen Norm auf dem \mathbb{R}^2 induzierten Metrik d auf X . Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von X offen bzw. abgeschlossen in (X, d) sind. Welche der Teilmengen sind kompakt? Skizzieren Sie die Mengen.

- (a) $M_1 = X$.
- (b) $M_2 = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$.
- (c) $M_3 = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1\}$.
- (d) $M_4 = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.
- (e) $M_5 = \{(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2\}$.

(2+2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3 (Charakterisierung der Stetigkeit durch Kurven)

Eine stetige Abbildung $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach \mathbb{R}^n nennt man *stetige Kurve* im \mathbb{R}^n .

- (a) Zeigen Sie, dass es zu jeder konvergenten Folge $(x_i)_{i \geq 1}$ im \mathbb{R}^n eine stetige Kurve $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $c(\frac{1}{i}) = x_i$. Was ist $c(0)$?
- (b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ in einen metrischen Raum X genau dann stetig ist, wenn für jede stetige Kurve $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Komposition $f \circ c: I \rightarrow X$ stetig ist.

Hinweis. Teil (b): Verwenden Sie Teil (a).

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, sodass es zu jeder Teilmenge $S \subset X$ mit $\text{diam}(S) \leq \lambda$ ein $i \in I$ gibt mit $S \subset U_i$.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 17.11.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128