Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Blatt 7

Aufgabe 1
Sei $c \in \mathbb{R}^*$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(t) = (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t)$, die sog. *logarithmische Spirale*.

(a) Skizzieren Sie für $c = \frac{1}{2\pi}$ das Bild der Kurve im Parameterbereich $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie für $a < b$ die Bogenlänge $L_{a,b}$ der eingeschränkten Kurve $f_{|[a,b]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

(c) Existiert der Limes $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

(d) Zeigen Sie, dass die logarithmische Spirale jeden Kreis um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ in genau einem Punkt schneidet. Berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels.

(1+2+1+2 Punkte)

Aufgabe 2
Entscheiden Sie, an welchen Stellen die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = y\sqrt{2x^2 + y^2}\,,$$

(a) partiell differenzierbar ist.

(b) total differenzierbar ist.

(c) stetig partiell differenzierbar ist.

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen.

(3+3+2 Punkte)

Aufgabe 3
Berechnen Sie die (totale) Ableitung (Jacobi-Matrix) der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,,$$

im Punkt (r,θ,φ).

(3 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Ball und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine (total) differenzierbare Funktion und es existiere eine Konstante $K \geq 0$, sodass

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}} \leq K$$

für alle $x \in U$ gilt. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig und damit insbesondere gleichmäßig stetig ist.

Hinweis. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ wie üblich als normierten Raum bzgl. der euklidischen Norm. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ist die zugehörige Operatornorm auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 01.12.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128