Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 10

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung vom Grad 3 der Funktion $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$(x, y) \mapsto \frac{-x-2y}{x+y}\,,$$
im Punkt $(1, 1)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die lokalen Extremstellen bzw. Sattelpunkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3axy\,.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist ein C^1-Diffeomorphismus, d.h. es existiert eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte C^1-Inverse $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu f. Korrigieren Sie, falls nötig, und beweisen Sie die korrigierte Aussage.

(2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (y^2 - x^2, -2xy)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und lokale inverse Abbildungen von f, wo sie existieren. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $\mathbb{R}^2$ genau zwei Urbildpunkte hat.

Hinweis. Schreiben Sie f in komplexen Koordinaten $z = x + iy$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5 (Stetigkeit der Ableitung notwendig im Satz über inverse Funktionen)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , \text{ falls } x \neq 0; \\ 0 & , \text{ falls } x = 0\,. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist mit $f'(0) = 1$, dass aber f auf jeder Umgebung der Null nicht injektiv ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Hinweis. Berechnen Sie f'.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 22.12.2017, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128