Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/2018**
C. Huck

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Blatt 12

Aufgabe 1
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Es gebe eine Konstante $C < 1$, sodass für die Operatornorm von $Df(x)$ gilt

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}} \leq C < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch $x \mapsto x + f(x)$, ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Hinweis. Die Bijektivität von g folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(1/2, 0, 1/2, 0)$ eindeutig nach $(u, v) = \varphi(x, y)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie auch die Jacobi-Matrix $J\varphi(x, y)$ von φ an der Stelle $(x, y) = (1/2, 0)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, welcher der Ellipsoidfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2 + (\tfrac{z}{c})^2 = 1\}$$

mit $a, b, c > 0$ einbeschrieben ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 (Gradientenfelder sind wirbelfrei)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das zugehörige Gradientenfeld, also $v = \operatorname{grad} f$. Zeigen Sie, dass jede Lösungskurve $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ der autonomen DGL

$$\dot{x} = v(x)$$

mit $c(0) = c(1) =: x_0 \in U$ konstant gleich x_0 ist.

Hinweis. Verwenden Sie die bekannten Eigenschaften geschlossener Kurvenintegrale.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 19.01.2018, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128